Suites géométriques

Introduction :

M. Finance dispose d'une somme de 50 000 FF et désire faire fructifier son pactole ; pour cela il va voir son banquier qui lui propose deux options :

① une augmentations forfaitaire, annuelle, de 5 000 F = Intérêts simples

② une augmentation, annuelle, de 8 % = Intérêts composés

Quelle option doit-il choisir s'il désire placer son argent pour une période de 2 ans ? 5 ans ? 10 ans ?

Durée du placement	1 an	2 ans	5 ans	10 ans
Intérêts simples	55 000	60 000	75 000	100 000
Intérêts composés	54 000	58 320	73 466	107 946

Dans le premier cas, il suffit d'ajouter 5 000 FF chaque année, on reconnait une suite arithmétique de premier terme u_0 = 50 000 et de raison r = 5 000. Rappeler l'expression générale d'une telle suite...

Dans le second cas, on multiplie la somme obtenue à l'année (n - 1) par 1,08 (1 + 8%) pour obtenir la somme de l'année n. Ce type de suite une **suite géométrique**.

On va chercher des méthodes qui nous permettent de connaître tout de suite la valeur de l'année n sans avoir besoin de calculer les années précédentes.

Cours :

• Soit q un nombre réel ($q \neq 0$) ; on appelle **suite géométrique de raison *q***, la suite définie par un premier terme u_1 (ou u_0) et par la relation « pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = q.u_n$ »

Dans l'exemple précédent nous avions bien une suite géométrique de premier terme 50 000 et de raison 1,08 : u_1 = 50 000 + 50 000x8% = 50 000 x(1 + 0,08) = 1,08 x 50 000 ; u_2 = 1,08 x u_1 ; ....

Exercice :

Exercice 1.

A l'aide des données fournies pour chacune des suites suivantes, répondez à la questions posée:

a) u_n = -5 si n est impair et u_n = 5 si n est pair ; la suite est-elle géométrique ?

b) u_0 = 2 et u_{n+1} = n. u_n la suite est-elle géométrique ?

Correction :

a) Oui, pour passer d'un terme à l'autre on multiplie toujours par -1.

b) u_0 = 2 ; u_1 = 1. u_0 = 2 ; u_2 = 2.u_1= 4 ; u_3 = 3. u_2= 12 donc pas toujours multiplié par le même terme, pas S.G.

Généraliser : pour savoir si une suite est géométrique on fait u_{n+1} / u_n et si le résultat est indépendant de n alors la suite est un S.G.

En profiter pour redire « un exemple permet de démontrer que quelque chose n'est pas mais ne permet pas de démontrer que quelque chose est, pour démontrer un cas général il faut le faire avec la relation générale ».

Cours :

Expression du terme général :

La relation $u_{n+1} = q.u_n$ permet de calculer u_2 à partir de u_1, *puis* u_3 à partir de u_2 et ainsi de suite, $u_1 = q.\, u_0$; $u_2 = q.\, u_1 = q.(q.u_0) = q^2.u_0$; $u_3 = q.u_2 = q.(q^2.u_0) = q^3.u_0$; ..... ; $u_n = q^n.u_0$

En résumé on a : • Si u_0 est le premier terme d'une suite géométrique (u_n) de raison q, le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite est : $u_n = q^n.u_0$ (si le premier terme est u_1, on a alors $u_n = q^{n-1}.\, u_1$)

Calcul d'un terme en fonction d'un autre :

de $u_n = q^n.u_0$ et $u_p = q^p.u_0$ on déduit sans qu'il soit besoin de diviser, que $u_n = q^{n-p}.u_p$ pour tout n et p de $\angle$.

Exercice :

Exercice 2. a) $u_5 = 729$; $q = -3$, calculez u_{10} et u_0

b) $u_0 = 1$; $u_7 = 128$, calculez q.

c) $u_4 = 44$; $u_{10} = 352$, calculez u_{13} (la raison est positive).

d) $w_0 = 2$ et $w_2 = 18$, calculez w_{10}

Correction :

a) $u_{10} = (-3)^5.u_5 = -177\,147$; $u_5 = (q)^5.u_0 \Rightarrow u_0 = -3$

b) $q = 2$

c) $q^6 = 8 \Rightarrow q = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $u_{13} = 704\sqrt{2}$

d) $w_{10} = 118\,098$

Cours :

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

Cherchons d'abord la somme des premières puissance de q :

$S = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n$ d'où $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n$ (1)

$q.S = q.(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n)$ d'où $q.S = q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n + q^{n+1}$ (2)

Par soustraction membre à membre des égalités (1) et (2), on obtient :

$S - q.S = 1 - q^{n+1}$ ou bien $S.(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ soit $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n = u_0 + q.u_0 + q^2.u_0 + q^3.u_0 + q^4.u_0 + \ldots\ldots + q^n.u_0$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0.(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n) = u_0.S$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \boldsymbol{u_0} \,.\, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **ou encore** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \boldsymbol{u_1} \,.\, \frac{1-q^{n}}{1-q}$

Exercice :

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

1° $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{1998}$ 2° $S = (-x) + x^2 - x^3 + \ldots\ldots + (-x)^{17}$

3° $\quad S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{14348907}$

Correction :

1\. $S = u_o \times \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{1999}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ 2. $S = u_o \times \frac{1-(-x)^{18}}{1+x} = 1\times\frac{1-(x)^{18}}{1+x}$ 3. $S = \frac{3}{2}$ ($14348907 = 3^{15}$)

Cours :

Variation. (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$

(u_n) est **constante** lorsque pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$

(u_n) est monotone lorsque (u_n) est croissante ou décroissante.

❶ Si q < 0, l'égalité $u_{n+1} = q.u_n$ permet d'affirmer que, pour tout n ; u_{n+1} et u_n sont de signes contraires. Les termes sont alternativement positifs et négatifs ; la suite n'est pas monotone.

❷ Si q > 0 ; $u_{n+1} - u_n = q^{n+1}.u_0 - q^n.u_0 = u_0.q^n.(q-1)$

On en déduit que si u_0 et (q - 1) sont de même signe, on a alors : $u_{n+1} \geq u_n$

On en déduit que si u_0 et (q - 1) sont de signe contraire, on a alors : $u_{n+1} \leq u_n$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$) et de premier terme u_0 ($u_0 \neq 0$)

	q < 0	0 < q < 1	q > 1
$u_0 > 0$	(u_n) n'est pas monotone	(u_n) est décroissante	(u_n) est croissante
$u_0 < 0$		(u_n) est croissante	(u_n) est décroissante

Bien insister sur le fait que pour chercher la monotonie d'une suite on doit faire $u_{n+1} - u_n$, c'est à dire avec le cas général et non pas prendre un ou deux cas particulier. De même quand on devra vérifier que la suite est géométrique il faut faire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et non pas $\frac{u_2}{u_1}$ ou $\frac{u_1}{u_0}$. C'est une erreur grave de prendre un cas particulier à la place d'un cas général.

Exercice :

Exercice 4. Montrez que la suite u, définie pour tout naturel n par $u_n = \frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante. Est-ce une suite géométrique ?

Correction :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$ (car n est un entier)

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{4}$ un contre exemple suffit à démontrer que la suite n'est pas géométrique.

Exercice 5. Etudiez les variations de la suite u définie pour tout naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Est-ce une suite géométrique ?

Correction :

$u_{n+1} - u_n = \frac{-n+2}{(n+3)(n+4)}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{4}$

Cours :

Limite d'une suite géométrique

n	10	100	1 000	10 000	limite conjecturée
$u_n = 1{,}08^n$	2,16	2 200	2.10^{33}		$+\infty$
$u_n = 2^n$					
$u_n = (\frac{1}{2})^n$					
$u_n = 0{,}25.u_{n-1}$					

- Soit un nombre réel q strictement positif.
  Si $q > 1$, alors $\lim q^n = +\infty$ (quand $n \to +\infty$)
  Si $q < 1$, alors $\lim q^n = 0$ (quand $n \to +\infty$)

Exemples : Soit $u_0 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$. On a $u_n = 5.(\frac{1}{2})^n$ et $\lim (\frac{1}{2})^n = 0$ donc $\lim u_n = 0$

Soit $u_0 = -3$ et $q = 2$. On a $u_n = (-3).\ 2^n$ et $\lim 2^n = +\infty$ donc $\lim u_n = -\infty$

exercices :

Exercice 6.

On place un capital de 100 000 francs à 7 % par an (intérêts composés).

1° De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? au bout de dix ans ?

2° Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ? pour le voir tripler ?

Correction :

1. $u_0 = 100\,000$; $q = 1{,}07$ $\Rightarrow$ $u_4 = 131\,080$ et $u_{10} = 196\,715$

2. $2 = q^n \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n = 11$ ans et $3 = q^n \Rightarrow n > 160 \Rightarrow n = 17$ ans

Exercice 7.

Deux propositions sont offertes pour placer une somme de 5 000 KD. Le premier placement est rémunéré à intérêts simples à un taux annuel de 5 % du capital initial. On note u_n la somme totale obtenue au bout de n années.

Le second placement est rémunéré à intérêts composés à un taux annuel de 4,5 %. On note alors v_0 la somme totale obtenue au bout de n années.

1° Que valent u_0 et v_0 ?

2° a - Déterminer u_n en fonction de n. b - Déterminer v_n en fonction de n.

3° Quel placement choisir si l'on décide d'immobiliser son argent pendant 5 ans ? 6 ans ?

Correction :

1. $u_0 = 5\,000 = v_0$ 2. $u_{n+1} = u_n + 250 = u_0 + 250n$ et $v_{n+1} = 1{,}045.v_n = (1{,}045)^n.v_0$

Exercice 8.

Soit la suite U définie par $u_o = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3} + 1$ pour tout n entier.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite U. Montrer que ce n'est pas une suite géométrique.

2. La suite V est définie par : $v_n = u_n - a$, pour tout n entier.

Déterminer le nombre réel a pour que la suite V soit géométrique.

3. Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

4. Calculer $\sum_{i=0}^{i=n} u_i$ en fonction de n.

Correction :

1. U n'est pas de la forme $u_{n+1} = qu_n$. (il y a le + 1)

2. $v_{n+1} = u_{n+1} - a = \frac{2}{3}u_n + 1 - a = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a\right)$ on veut que ça soit égal à $\frac{2}{3}(u_n - a) = \frac{2}{3}(v_n)$ donc on a :

$\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}a\right) = -a \Rightarrow a = 3$ et V est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

3. $v_0 = u_0 - 3 = -2$; $v_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow u_n = (-2)\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

4. $\sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} v_i + (n+1)(3) = 3\times(n+1) - 6$ (car $\sum_{i=0}^{i=n} v_i = \ldots = -6$; somme d'une S.G.)

Exercice 9.

Soit le suite U définie par $u_o = 2$; $u_1 = 2$ et la relation de récurrence R : $8u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_2 ; u_3 .

2. Déterminer les suites géométriques vérifiant la relation R.

3. Montrer que si deux suites V et W de termes v_n et w_n vérifient la relation R, alors la suite T dont les termes sont définis par $t_n = v_n + w_n$ vérifie la relation R.

4. Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

5. Calculer $\sum_{i=0}^{i=20} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

Correction :

1. $u_2 = \frac{5}{4}$ et $u_3 = \frac{11}{16}$

2. $v_{n+1} = qv_n$ et $v_{n+2} = q^2.v_{n+1}$ donc si elles vérifient la relation R on a : $8v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$

$\Leftrightarrow 8v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n = 0$

d'où $8q^2v_n - 6qv_n + v_n = 0 \Leftrightarrow v_n(8q^2 - 6q + 1) = 0$ or on sait que $v_n \neq 0$ donc $8q^2 - 6q + 1 = 0$

donc q = ½ ou q = ¼

Pour q = ½ on a : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ et $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$ Pour q = ¼, on a : $w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n$ et $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0$

3. $8t_{n+2} - 6t_{n+1} + t_n = 8v_{n+2} + 8w_{n+2} - 6v_{n+1} - 6w_{n+1} + v_n + w_n = (8v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n) + (8w_{n+2} - 6w_{n+1} + w_n) = 0$

donc t_n vérifie la relation R.

4. $\begin{cases} u_0 = v_0 + w_0 \\ u_1 = v_1 + w_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = v_0 + w_0 \\ 2 = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{4}w_0 \end{cases} \Rightarrow v_0 = 6$ et $w_0 = -4$. $\Rightarrow v_n = 6.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $w_n = (-4).\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

donc $u_n = 6.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4.\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

5. $\sum_{i=0}^{i=20} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = 6.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}} - 4.\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{21}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} - \frac{4}{\frac{3}{3}} = \frac{20}{3}$

Exercice 10.

Soit une suite U définie par récurrence de la façon suivante: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite U.
b) Quelles sont les limites possibles de la suite U ?
c) Calculer le nombre a tel que la suite V de terme général défini par $v_n = u_n + a$ soit géométrique.
d) Calculer alors u_n en fonction de n et démontrer que la suite U est convergente.
e) Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite U.

Correction :

a) b) $u_0 = 3$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{5}{3}$; $u_3 = \frac{14}{9}$; $u_4 = \frac{41}{27}$ $\Rightarrow$ limites possibles 1 ; 0 ou 1,5

c) $v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{1}{3}u_n + 1 + a = \frac{1}{3}(u_n + 3 + 3a)$ on veut $= \frac{1}{3}(u_n + a) = \frac{1}{3}v_n$.

donc $3 + 3a = a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$; $q = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $v_n = u_n - \frac{3}{2}$; $v_0 = u_0 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

d) $v_n = \left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\Rightarrow$ $u_n = \left(\frac{3}{2}\right).\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ lorsque $n \to +\infty$; $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ donc $\lim u_n = \frac{3}{2}$.

e) $\sum_{i=0}^{i=20} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = v_0 + \frac{3}{2} + v_1 + \frac{3}{2} + \ldots + v_{20} + \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right).\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{1-\frac{1}{3}} + 21 \times \left(\frac{3}{2}\right) = \ldots = \frac{135}{4}$

Exercice 11.

Soit une suite U définie par récurrence de la façon suivante: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right) \end{cases}$

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ a) Montrer que si $x > 0$ alors $f(x) > 0$

b) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'on a $u_n > 0$.

2. a) Montrer que $\forall\, x > 0$ on a $f(x) < \dfrac{x}{2}$

b) En déduire pour $n \geq 1$ on a $u_n < \dfrac{1}{2} u_{n-1}$.

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que $u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

4. En déduire la limite de u_n.

Correction :

1. a) $x > 0$; $\dfrac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

   b) $u_0 = 2 > 0$ supposons que $u_p > 0$ on a d'après a) $f(u_p) > 0$ donc $u_{p+1} > 0$
   d'où pour tout n on a $u_n > 0$

2. a) $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{-x^2}{2(1+x)} < 0 \Rightarrow$ $f(x) - \dfrac{x}{2} < 0 \Rightarrow$ $f(x) < \dfrac{x}{2}$

   b) $u_{n+1} < \dfrac{u_n}{2}$

3. $u_0 = 2 = \dfrac{1}{2^{-1}}$ Supposons $u_p = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ on a : $u_{p+1} < \dfrac{u_p}{2}$ $\Rightarrow$ $u_{p+1} < \dfrac{\frac{1}{2^{p-1}}}{2}$ $\Rightarrow$ $u_p \leq$
$\dfrac{1}{2^{p-1}}$

4. $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \to 0$ lorsque n tend vers 0 d'où $\lim u_n = 0$