Exercice 1. (5 points)

Le 1er janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêt composés au taux annuel de 3%. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 3% du capital de l'année précédente). On note C_n le capital de René disponible au 1er janvier de l'année 2002+n.

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et montrer que C_n peut s'écrire : $C_n = 1,03^n \times 5000$.
3. Préciser le sens de variation de la suite (C_n).
4. Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7000 euros. Son capital sera-t-il alors suffisant pour subvenir à cette dépense ?
5. Quel nombre minimal d'années devra-t-il attendre pour retirer un capital de 7000 euros ?

Exercice 2. (10 points)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$.

1. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$. (On ne demande pas les limites).
   (b) En déduire que si $2 \leq x \leq 4$, alors $2 \leq f(x) \leq 4$.
2. On définit la suite (u_n) explicitement par $u_n = f(n)$, pour tout entier n tel que $n > 0$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   (b) A l'aide de la question 1, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. On définit la suite récurrente (v_n) par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (a) Vérifier que $2 \leq v_1 \leq 4$.
   (b) A l'aide de la question 1, montrer que si $2 \leq v_n \leq 4$ alors $2 \leq v_{n+1} \leq 4$.
   (c) On admet que le terme général v_n vérifie $2 \leq v_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n.
   Etudier le signe de la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.
   En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
   (d) Quelle conjecture peut-on former sur la convergence de la suite (v_n) ?

Exercice 3. (5 points)

La suite (d_n) est définie par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + (d_n)^2} \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Vérifier que tous les termes d_n sont positifs.
3. Vérifier que la suite (d_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.
4. On pose $u_n = (d_n)^2$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
5. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
6. Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{n} \leq d_n \leq n$. En déduire la limite de la suite (d_n).

Bonus

Les suites (u_n) et (v_n) vérifient : $u_n \geq 0$ et $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

[A] Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
[B] Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 1. (Corrigé)

1. (a) Après un an de placement, le disponible C_1 est la somme du capital initial C_0 et des d'intérêts $0{,}03 \times C_0$. Donc $C_1 = 1,03 \times C_0 = 5150$ (en euros).
   De même : $C_2 = C_1 + 0{,}03 \times C_1 = 1{,}03 \times C_1 = 5304{,}5$ (en euros).

   (b) De façon générale, le capital disponible après n années de placement C_{n+1} est égal au capital disponible l'année précédente, C_n, augmenté des 3% d'intérêts, $0{,}03 \times C_n$. D'où la relation de récurrence : $C_{n+1} = 1{,}03 \times C_n$ (pour tout entier naturel n).
   Cette relation prouve que (C_n) est la suite géométrique de premier terme $C_0 = 5000$ et de raison 1,03. Le terme général C_n s'exprime donc en fonction de n par :

   $$C_n = 5000 \times 1{,}003^n$$

   (c) Les termes C_n sont positifs d'après la formule précédente. La raison de la suite est strictement supérieure à 1, donc :

   $$C_n < 1,03 \times C_n \text{ c'est-à-dire } C_n < C_{n+1}$$

   La suite est strictement croissante.

2. (a) Le capital disponible au 1er janvier 2010 correspond à C_8. On constate qu'il est inférieur à la somme désirée.

   $$C_8 = 5000 \times 1,003^8 \simeq 6334 \quad \text{(en euros)}$$

   (b) On affiche les valeurs de la suite à la calculatrice et on recherche le plus petit entier n tel que $C_n \geq 7000$. On obient : $C_{11} \simeq 6921{,}2$ et $C_{12} \simeq 7128{,}8$.
   Il faut donc attendre 2014, soit douze années, pour disposer d'au moins 7000 euros.

Exercice 2. (Corrigé)

1. (a) La fonction f est définie et dérivable sur $]0;4]$.

   $$f = \frac{1}{2}(u+v) \quad \text{avec } u : x \mapsto x \text{ et } v : x \mapsto \frac{4}{x}$$
   $$f' = \frac{1}{2}(u'+v') \quad \text{avec } u'(x) = 1 \qquad v'(x) = -\frac{4}{x^2}$$
   $$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \frac{x^2-4}{2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}$$

   Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de son numérateur. Or le polynôme du second degré $(x-2)(x+2)$ s'annule en -2 et en 2 et il est positif sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.
   D'où les variations de f :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\vert\vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

   $f(2) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{4}{2}\right) = 2$
   $f(-2) = -2$
   (en remarquant que f est impaire)

   (b) f étant croissante sur $[0;2]$ elle conserve l'ordre :

   $$\text{si } 2 \leq x \leq 4 \quad \text{alors} \quad \underbrace{f(2)}_{=2} \leq f(x) \leq \underbrace{f(4)}_{=\frac{5}{2}} \quad \text{et donc} \quad 2 \leq f(x) \leq 4$$

2. (a) Les trois premiers termes de la suite sont u_1, u_2 et u_3 (u_0 n'est pas défini).

   $$u_1 = f(1) = \frac{5}{2} \qquad u_2 = f(2) = 2 \qquad u_3 = f(3) = \frac{13}{6}$$

(b) On sait que f est strictement croissante sur $]2,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,2[$.
On en déduit que $u_2 < u_1$ et $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier n supérieur à 2.
La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

(c) $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{4}{n} = 0 \end{cases}$ donc $\begin{array}{ll} \lim n + \dfrac{4}{n} = +\infty & \text{(par somme)} \\ \lim \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{4}{n}\right) = +\infty & \text{(en multipliant par } \dfrac{1}{2}) \end{array}$

3. (a) $v_1 = \dfrac{1}{2}\left(v_0 + \dfrac{4}{v_0}\right) = \dfrac{13}{6} = 2 + \dfrac{1}{6}$. Cette valeur est bien comprise entre 2 et 4.

(b) D'après 1. on sait que si $2 \leq x \leq 4$ alors $2 \leq f(x) \leq 4$.
On sait que $2 \leq v_n \leq 4$ donc $2 \leq f(v_n) \leq 4$.
Or, par définition, $v_{n+1} = f(v_n)$. D'où le résultat annoncé.

(c) Exprimons la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right) - v_n = -\frac{v_n}{2} + \frac{4}{v_n} = \frac{-v_n^2 + 4}{2v_n} = \frac{4 - v_n^2}{2v_n}$$

Sachant que $2 \leq v_n \leq 4$ on a $\begin{cases} 2 \leq v_n \text{ donc } v_n > 0 \\ 0 < v_n \leq 4 \text{ donc } \quad 4 \leq v_n^2 \text{ et } 4 \leq v_n 2 \end{cases}$.

Donc $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est strictement décroissante.

(d) La suite est strictement décroissante et elle est minorée par 2; par ailleurs sa table de valeurs montre des valeurs très proches de 2. On conjecture que (v_n) converge vers 2 (très rapidement).

Exercice 3. (Corrigé)

1. On nous donne $d_0 = 1$. Par calcul : $d_1 = \sqrt{2}$ et $d_2 = \sqrt{3}$.
2. Par définition $d_n = \sqrt{1 + (d_{n-1})^2}$ (n quelconque).
   Or $(d_{n-1})^2 \geq 0$ donc $1 + (d_{n-1})^2 \geq 1$ et $\sqrt{1 + (d_{n-1})^2} \geq 1$ c-à-d $d_n \geq 0$.
3. (d_n) n'est pas arithmétique car la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante :

$$d_1 - d_0 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad d_2 - d_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \text{or } \underbrace{\sqrt{3} - \sqrt{2}}_{\simeq 0{,}32} \neq \underbrace{\sqrt{2} - 1}_{\simeq 0{,}4}$$

   De même, pour prouver que (d_n) n'est pas géométrique, on vérifie que $\dfrac{d_1}{d_0} \neq \dfrac{d_2}{d_1}$.
4. Il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs de (uu_n) est constante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = d_{n+1}^2 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + d_n^2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = 1 + (d_n)^2 = 1 + u_n$$

5. (u_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$ (d_0^2) donc $u_n = 1 + n$. Or $d_n = \sqrt{u_n}$ (car $d_n > 0$ et $u_n = d_n^2$) donc $d_n = \sqrt{n+1}$.
6. La première inégalité $n \leq n + 1$ est évidente. La deuxième inégalité $n + 1 \leq n^2$ équivaut à $n^2 - n - 1 \geq 0$. Or les racines du trinôme $x^2 - x - 1$ sont $\{\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\}$ (obtenues par la méthode du discriminant).
   Donc, pour $n \geq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ c-à-d pour $n \geq 2$ la deuxième inégalité est vérifiée.
   On sait (limites de référence) que $\lim \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim n = +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim \sqrt{n+1} = +\infty$.

Bonus (Corrigé)

Rappel : une suite converge si et seulement si elle admet une limite finie.

A La proposition est vraie en raison des régles opératoires sur les limites de quotients.
Soit l tel que $\lim u_n = l$. Alors $\lim 1 + u_n = 1 + l$.

Il y a deux cas : $\left\| \begin{array}{l} \text{cas où } l \neq -1 : \lim u_n = \dfrac{l}{1+l} \\ \text{cas où } l = -1 : \lim \dfrac{1}{1+u_n} = \pm\infty \text{ donc } \lim \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0 \end{array} \right.$

B Un contre-exemple montre que la proposition est fausse.
Prenons $u_n = n$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
Or $v_n = \dfrac{n}{1+n} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ et on montre que $\lim v_n = 1$.