

**1<sup>ère</sup> S 4 Devoir Surveillé n° 5**

- Durée 2  
- Calculatrices autorisées

**Barème :**

1) 3 pts 2) 3 pts 3) 4 pts

4) 3 pts 5) 7 pts

**nom :****voisin :****voisin :****voisin :**

**Commentaires :** Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La rédaction est importante. Soyez propre et clair. Bonne chance ...

**STATISTIQUES****Ex1 :**

La moyenne de la classe à un devoir est 11,2 et l'écart type est 1,8.

Quelle transformation affine  $x \mapsto ax + b$  (avec  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) appliquer à la série des notes afin de se ramener à une moyenne égale à 0 et un écart type égal à 1 ?

On note  $x$  l'ancienne note et  $y$  la nouvelle note.

Avec les notations usuelles pour la moyenne et l'écart type, on a :

$$\begin{cases} \bar{y} = a\bar{x} + b \\ s_y = |a|s_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 11,2a + b \\ 1 = 1,8a \end{cases} \dots \text{On trouve } y = \frac{x - 11,2}{1,8}$$

**Ex 2 :**

On considère la série statistique suivante :

Valeur	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	Total
Effectif	$n_1$	$n_2$	...	$n_p$	$N$

$$\text{Calculer } \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^p (n_i x_i - n_i \bar{x}) = \sum_{i=1}^p n_i x_i - \sum_{i=1}^p n_i \bar{x} = \sum_{i=1}^p n_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^p n_i = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

**DERIVATION****Ex 3 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  et  $C$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

a) Prouver que la tangente à  $C$  au point  $M$  de  $C$  d'abscisse  $a$ , a pour équation  $y = (2a + 2)x - a^2 + 1$

La fonction  $f$  est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = 2x + 2$$

La tangente à  $C$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow y = (2a + 2)(x - a) + a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow y = (2a + 2)x - a^2 + 1$$

b) Déterminer les équations réduites des deux tangentes à  $C$  issues du point  $A(0; -1)$

Les tangentes à  $C$  issues du point  $A$  ont une équation de la forme  $y = (2a + 2)x - a^2 + 1$  et passent bien sûr par  $A$ , donc ... :

$$-1 = (2a + 2)0 - a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2}$$

On obtient

$$y = (2\sqrt{2} + 2)x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = (2\sqrt{2} + 2)x - 1$$

Et

$$y = (-2\sqrt{2} + 2)x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = (-2\sqrt{2} + 2)x - 1$$

c) Tracer  $C$  et les deux tangentes

**Ex 4 :** Soit  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$

$$Df = \mathbb{R} - \{-2\}$$

b) Etudier les variations de  $f$

$f$  est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, c'est à dire  $\mathbb{R} - \{-2\}$

Pour tout  $x \neq -2$ , on a :

$$f'(x) = \dots = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$$

$f'(x)$  est du signe de  $x^2 + 4x + 1$

Les racines de  $x^2 + 4x + 1$  sont ....  $x_1 = -\sqrt{3} - 2$  et  $x_2 = \sqrt{3} - 2$

On en déduit les variations de  $f$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$-2$	$x_2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f$		↘ $f(x_1)$ ↗		↘ $f(x_2)$ ↗	

$$f(x_1) = -2\sqrt{3} - 4$$

$$f(x_2) = 2\sqrt{3} - 4$$

c) Déterminer ses extrémas éventuels

$f$  admet pour maximum local  $-2\sqrt{3} - 4$  en  $-\sqrt{3} - 2$

$f$  admet pour minimum local  $2\sqrt{3} - 4$  en  $\sqrt{3} - 2$

### Ex 5 :

Soit  $f$  une fonction, dérivable sur un intervalle  $E$ , et dont la dérivée vérifie, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$  (càd la dérivée est bornée)

1) On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $E$ , par  $g(x) = f(x) - mx$ .

a) Montrer que la fonction  $g$  est croissante sur  $E$ .

$f$  est dérivable sur  $E$  et la fonction  $x \mapsto -mx$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $E$

On en déduit que  $g$  est dérivable sur  $E$  (somme de deux fonctions dérivable sur  $E$ )

Et pour tout  $x \in E$ , on a :

$$g'(x) = f'(x) - m$$

Pour tout  $x \in E$ , on a :  $m \leq f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - m \geq 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

On en déduit que  $g$  est croissante sur  $E$ .

b) En déduire que, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $E$  vérifiant  $a < b$ , alors  $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  vérifiant  $a < b$ .

$g$  est croissante sur  $E$ , donc :

$$g(a) \leq g(b) \Leftrightarrow f(a) - ma \leq f(b) - mb \Leftrightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a)$$

2) On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $E$ , par  $h(x) = f(x) - Mx$ .

a) Montrer que la fonction  $h$  est décroissante sur  $E$ .

$f$  est dérivable sur  $E$  et la fonction  $x \mapsto -Mx$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $E$

On en déduit que  $h$  est dérivable sur  $E$  (somme de deux fonctions dérivable sur  $E$ )

Et pour tout  $x \in E$ , on a :

$$h'(x) = f'(x) - M$$

Pour tout  $x \in E$ , on a :  $f'(x) \leq M \Leftrightarrow f'(x) - M \leq 0 \Leftrightarrow h'(x) \leq 0$

On en déduit que  $h$  est décroissante sur  $E$ .

b) En déduire que, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $E$  vérifiant  $a < b$ , alors  $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  vérifiant  $a < b$ .

$h$  est décroissante sur  $E$ , donc :

$$h(a) \geq h(b) \Leftrightarrow f(a) - Ma \geq f(b) - Mb \Leftrightarrow f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

3) Déduire des questions 1) et 2) un encadrement de l'accroissement de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

$$\text{On a } m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

4) Soit  $f$ , la fonction racine carrée, définie sur l'intervalle  $[1; 4]$ , noté  $E$ .

a) Prouver que, pour tout  $x$  de  $E$ , la dérivée de  $f$  vérifie :

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , donc sur  $[1; 4]$

Et pour tout  $x \in [1; 4]$ , on :  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On a  $1 \leq x \leq 4$  donc  $\sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{4}$  ( car  $x \mapsto \sqrt{x}$  croissante sur  $]0; +\infty[$  )  
Donc  $2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4$  et  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$  cad  $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire un encadrement de  $\sqrt{b}$  avec  $b$  élément de  $E$ .

Sur  $[1; 4]$ , on a  $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

On a  $b \in [1; 4]$ ; donc sur  $[1; b]$ , on a aussi  $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

En appliquant le résultat de la question 3) sur l'intervalle  $[1; b]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(b-1) \leq f(b) - f(1) \leq \frac{1}{2}(b-1) \\ \Leftrightarrow & \frac{b}{4} - \frac{1}{4} + 1 \leq \sqrt{b} \leq \frac{b}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{b+3}{4} \leq \sqrt{b} \leq \frac{b+1}{2} \end{aligned}$$

c) En déduire un encadrement des nombres  $\sqrt{1,1}$ ,  $\sqrt{1,01}$

$$\frac{4,1}{4} \leq \sqrt{1,1} \leq \frac{2,1}{2} \Leftrightarrow 1,025 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$$

$$\frac{4,01}{4} \leq \sqrt{1,01} \leq \frac{2,01}{2} \Leftrightarrow 1,0025 \leq \sqrt{1,01} \leq 1,005$$