

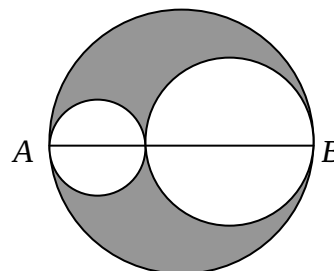
Exercice n°1 : (7 points)

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

1. Montrer que la courbe C_f représentative de f est l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.
2. Montrer que la courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.
3. Tracer les courbes C_f et Γ dans un même repère (*unité graphique : 2 cm*).
4. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ , puis vérifier les résultats graphiquement.
5. Déterminer algébriquement le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Donner une interprétation graphique de ce signe.

Exercice n°2 : (7 points)

On considère un point M sur le diamètre $[AB]$ d'un cercle. Il détermine deux cercles de diamètre $[AM]$ et $[MB]$. On pose $AB = 4$ et $AM = x$.



1. Montrer que l'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie par : $A(x) = \frac{P}{2}(-x^2 + 4x)$.
2. Déterminer la position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale.
3. Existe-t-il une position de M pour laquelle $A(x)$ soit strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$?
4. Déterminer les positions de M pour lesquelles $A(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$.

Exercice n°3 : (6 points)

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2x - 6$.

Voici les tableaux de variation des fonctions f et g .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f		-5	
	$-\infty$		$-\infty$

x	$-\infty$	-6	-5	$+\infty$
g				$+\infty$
	$-\infty$		0	

1. Quels sont les antécédents de -6 par f ?
2. Dresser le tableau de variation de $g \circ f$.

Bon travail !

Corrigé du devoir n°2

Exercice n°1 :

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$. La courbe C_f représentative de f est donc l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

2. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5$. La courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par la translation de vecteur $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

3. Tracé des deux paraboles C_f et Γ .

4. Les coordonnées $(x; y)$ des points d'intersection de C_f et Γ vérifient :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ \frac{3}{2}x^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ sont donc $(2; -3)$ et $(-2; 5)$.

5. $f(x) - g(x) = (x^2 - 2x - 3) - \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\right) = \frac{3}{2}x^2 - 6$.

$\frac{3}{2}x^2 - 6$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines -2 et 2 .

Sur $] -\infty; -2[$ et sur $] 2; +\infty[$, $f(x) > g(x)$ et la courbe C_f est donc au-dessus de la courbe Γ .

Sur $] -2; 2[$, $f(x) < g(x)$ et la courbe Γ est donc au-dessus de la courbe C_f .

Exercice n°2 :

1. L'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie sur $[0; 4]$ par :

$$A(x) = p \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - p \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2 - p \times \left(\frac{MB}{2}\right)^2 = p \times (2)^2 - p \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 - p \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \dots = \frac{p}{2}(-x^2 + 4x).$$

2. $A: x \rightarrow \frac{p}{2}(-x^2 + 4x) = -\frac{p}{2}(x-2)^2 + 2p$ est une fonction du 2° qui est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 4]$ car le coefficient du x^2 est négatif. A admet donc un maximum en $x = 2$ égal à $2p$.

La position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$.

3. $A(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{p}{2}(-x^2 + 4x) > p \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + p \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$; soit après calculs, $x^2 - 4x + 4 < 0$.

Or $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$. Il est donc impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

4. $A(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que :

$$\frac{p}{2}(-x^2 + 4x) \leq \frac{1}{2} \left[p \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + p \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 \right] ; \text{ soit après calculs, } 3x^2 - 12x + 8 \geq 0.$$

Or $3x^2 - 12x + 8$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines $2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ et $2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Les positions de M vérifiant le problème sont donc telles que $x \in \left[0; 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right] \cup \left[2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}; 4\right]$.

Exercice n°3 : voir corrigé en classe.

1. Les antécédents de -6 par f sont les réels x tels que $f(x)=-6$.
 Or $f(x)=-6 \Leftrightarrow -x^2-2x-6=-6 \Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$.
 Ainsi les antécédents de -6 par f sont 0 et -2 .

2. Pour $x \in]-\infty ; -2]$, $g \circ f$ est la composée de : f est croissante et à valeurs dans $]-\infty ; -6]$ par g croissante ,
 donc $g \circ f$ est croissante.

Pour $x \in]-2 ; -1]$, $g \circ f$ est la composée de : f est croissante et à valeurs dans $]-6 ; -5]$ par g décroissante ,
 donc $g \circ f$ est décroissante.

Pour $x \in]-1 ; 0]$, $g \circ f$ est la composée de : f est décroissante et à valeurs dans $]-6 ; -5]$ par g décroissante ,
 donc $g \circ f$ est croissante.

Pour $x \in]0 ; +\infty]$, $g \circ f$ est la composée de : f est décroissante et à valeurs dans $]-\infty ; -6]$ par g croissante ,
 donc $g \circ f$ est décroissante.

Ainsi :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$	-6	-5	-6	$-\infty$
g					
$g \circ f$	$-\infty$	4	0	4	$-\infty$