FONCTIONS POLYNOMES ET SECOND DEGRE

1) FONCTIONS POLYNÔMES

A) PROBLEMES DE NOTATION

Si l'on veut nommer n réels, choisir une lettre distincte pour désigner chacun d'entre eux , est très laborieux surtout si il y a plus de 26 réels. Heureusement, en mathématiques, on a une solution pour remédier à ce petit problème :

On choisit une seule lettre, a par exemple, et on désigne chacun de ces réels par cette lettre affectée d'un **indice**, par exemple a_1 *(qui se lit « a indice 1 » ou « a 1 » pour les pressés)*
Ces n réels sont désignés alors par :

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$$

Les pointillés représentent tous les réels a_i que l'on n'a pas écrits .

B) DEFINITION

On appelle **fonction polynôme** (**polynôme** pour simplifier) toute fonction définie sur IR, qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{(où n est un entier naturel et } a_0 , a_1 , \dots , a_n \text{ sont n + 1 réels)}$$

Rem :

- Le polynôme de la définition est ordonné suivant les puissances décroissantes de x .
- Un polynôme est toujours défini sur IR ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement .
- La fonction, définie sur IR, par $x \longmapsto 0$ est **la fonction polynôme nulle** .
- Les **fonctions constantes** ($x \longmapsto k$) , Les **fonction affines** ($x \longmapsto ax + b$) , les **fonctions puissances** ($x \longmapsto x^n$) sont des polynômes .

Ex :

- La fonction P, définie, sur IR par P : $x \longmapsto (x - 1) (x - 2) (x - 3)$ est un polynôme.
  En effet, après développement, on a pour tout réel x, $P (x) = x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6$
- La fonction Q , définie sur IR , par Q : $x \longmapsto \dfrac{(x^2 + 1) (2 x - 1)}{x^2 + 1}$ est un polynôme.
  En effet, après simplification, on a pour tout réel x, $G (x) = 2 x - 1$
- La fonction h : $x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ n'est pas un polynôme car elle n'est pas définie sur IR .

C) UNICITE DE LA DEFINITION ET DEGRE D'UN POLYNOME (admis)

Soit P un polynôme non nul . Alors il existe un **unique** entier naturel n et des réels **uniques** $a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$ (avec $a_n \neq 0$) , tels que, pour tout réel x :

$$P (x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n est appelé le **degré** du polynôme P et on note deg (P) = n . Les réels $a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$ sont appelés les **coefficients** du polynôme P . Plus précisément , a_k (avec $0 \leq k \leq n$) est le coefficient de x^k (ou du terme de degré k)

Ex :

- Toute fonction constante **non nulle** est un polynôme de degré 0
- Toute fonction affine $x \longmapsto a x + b$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme de degré 1
- Toute fonction $x \longmapsto a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme de degré 2 (ou trinôme de degré 2)
- Toute fonction $x \longmapsto a_n x^n$ (avec $a_n \neq 0$) est **un monôme** de degré n

Rem

- Le polynôme nul n'a pas de degré.
- Certains coefficients d'un polynôme non nul peuvent être nuls.
  Par exemple pour $x \longmapsto x^4 + 3 x^3 + x$, les coefficients des termes de degré 0 et 2 sont nuls.

D) POLYNÔMES EGAUX (admis)

Deux polynômes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le **même degré** et si les **coefficients de leurs termes de même degré sont égaux**.

Ex :

Pour tout réel x , $a x^4 + b x^3 + c x^2 + e x + f = \frac{1}{2} x^4 + \sqrt{2} x^2 - 3 x \iff a = \frac{1}{2}, \quad b = 0 , \quad c = \sqrt{2} , \quad e = - 3 \quad \text{et} \quad f = 0$

2) TRINÔME DU SECOND DEGRE

A) DEFINITION

On appelle **fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré)** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui peut s'écrire sous la forme :

$x \longmapsto a x^2 + b x + c$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant .
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur $\mathbb{R}$; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement .
- *Par abus de langage*, on utilise souvent l'expression trinôme du second degré $a x^2 + b x + c$ au lieu de trinôme du second degré $x \longmapsto a x^2 + b x + c$

Ex :

- Les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) sont des trinômes du second degré:

  $x \longmapsto 3 x^2 + 2 x + 3$, $x \longmapsto 4 x^2$ et $x \longmapsto (x + 1)^3 - (x - 1)^3$ (car pour tout réel x, $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6 x^2 + 2$)
- la fonction $x \longmapsto (x + 1)^2 - (x - 1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x , $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4 x$

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Soit $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré .

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right)$

Or $x^2 + \frac{b}{a} x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$

Donc , pour tout réel x , $a x^2 + b x + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4 ac}{4 a^2} \right)$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme f

Rem : le réel $b^2 - 4 a c$ se note Δ *(delta)* et s'appelle **le discriminant du trinôme** .

C) VARIATIONS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f (x)	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

f admet **un minimum** en $-\frac{b}{2a}$

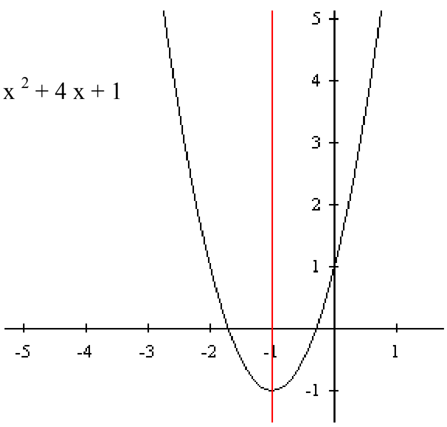
a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f (x)	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

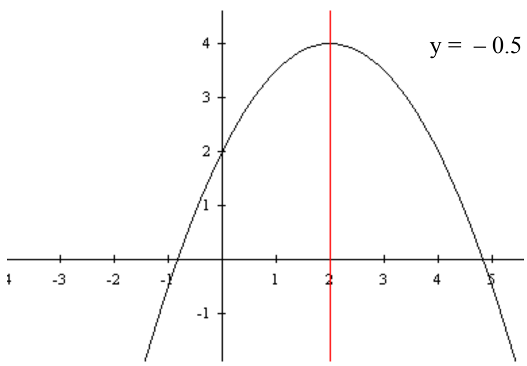
f admet **un maximum** en $-\frac{b}{2a}$

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une **parabole** , dont le sommet est $S \left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$
- La droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de *P* .
- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

$y = 2 x^2 + 4 x + 1$



$y = -0.5 x^2 + 2 x + 2$



Rem :

Comme nous l'avons vu , le trinôme du second degré $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$) , peut aussi s'exprimer sous la forme $f : x \longmapsto a ((x - \alpha)^2 + \beta)$. Ainsi f est une fonction associée à la fonction $x \longmapsto x^2$.
La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$, s'obtient à partir de la parabole *P* d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, puis une dilatation , c'est à dire une " une multiplication par a"

3) EQUATION DU SECOND DEGRE ET FACTORISATION

A) DEFINITION

Une **équation du second degré à une inconnue x** est une équation qui peut s'écrire sous la forme $a x^2 + b x + c = 0$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)	Soit le trinôme du second degré $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) L'équation $a x^2 + b x + c = 0$ s'écrit aussi $f (x) = 0$. Résoudre cette équation dans IR, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f (u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RESOLUTION

$a \neq 0$, donc, pour tout réel x, $a x^2 + b x + c = 0 \Leftrightarrow a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Trois cas se présentent :

Si $\Delta < 0$	$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation n'a donc pas de solution dans IR . *(un carré n'est jamais strictement négatif)*
Si $\Delta = 0$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$ L'équation a donc pour unique solution dans IR : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans IR : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ex : *Résoudre dans IR les équations ci-dessous :*

$6 x^2 - x - 1 = 0$ *(a = 6 , b = – 1 , c = – 1)*	$x^2 - 3x + 4 = 0$ *(a = 1 , b = – 3 , c = 4)*	$2x^2 - 12x + 18 = 0$ *(a = 2 , b = –1 2 , c = 18)*
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$ $\Delta > 0$, donc l'équation $6 x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions dans IR : $x_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ $S = \{ -\frac{1}{3} ; \frac{1}{2} \}$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans IR . $S = \varnothing$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ $\Delta = 0$, donc l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ admet une solution dans IR : $x_0 = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$ $S = \{ 3 \}$

Rem :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant . (ex : $4 x^2 - 9 = 0$, $5 x^2 - 4 x = 0$, …)
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$ et l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ admet deux solution distinctes .
- Lorsque l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Application :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre . (ex : 1 est une solution évidente de $2 x^2 - 5 x + 3 = 0$, donc l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$)
- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs .

C) FACTORISATION DU TRINOME $a x^2 + b x + c$

On a vu que , pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

Trois cas se présentent :

$\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré .
$\Delta = 0$	$a x^2 + b x + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ($-\frac{b}{2a}$ est appelée **racine double** du trinôme)
$\Delta > 0$	$a x^2 + b x + c =$ **a** $(x - x_1) (x - x_2)$ (où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)

4) SIGNE DU TRINOME $a x^2 + b x + c$

Etudions le signe de $f(x) = a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$)

- Si $\Delta > 0$

Soit x_1 et x_2 les racines du trinôme (avec, par exemple $x_1 < x_2$)
On a donc :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pour résumer : **“ $a x^2 + b x + c$ est du signe de a sauf entre les racines ”**

- Si $\Delta \leq 0$, on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

  - Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et donc , pour tout réel x, **$a x^2 + b x + c$ est du signe de a .**

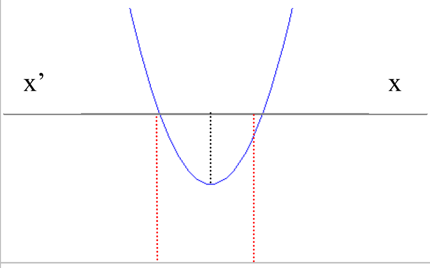
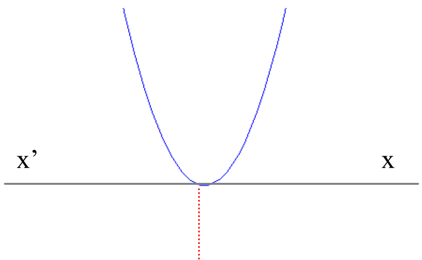
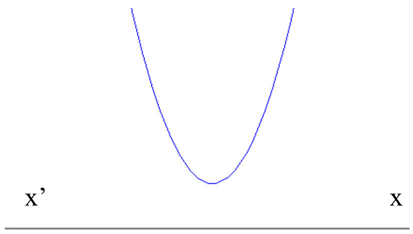
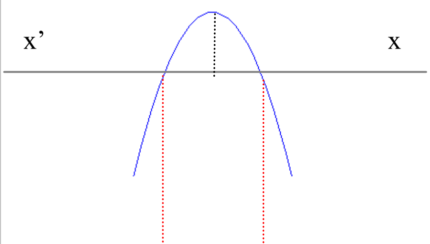
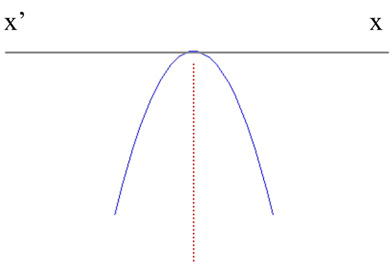
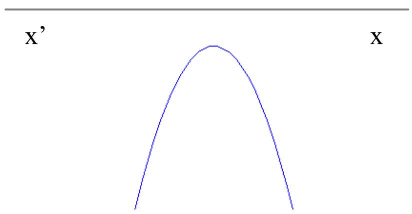
  - Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et donc , pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, **$a x^2 + b x + c$ est du signe de a (pour $x = -\frac{b}{2a}$, $f(x) = 0$)**

Ex : *Résoudre dans IR l'inéquation* $f(x) < 0$ avec $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 49$ (> 0) ; les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Or $f(x)$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines . Ainsi l'ensemble des solutions est $S =]-3 ; \frac{1}{2}[$

5) RECAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de f	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de racine
Factorisation	$f(x) = \mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = \mathbf{a}(x - x_0)^2 = \mathbf{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	Pas de factorisation
a > 0			
Signe de f (x)	+ **0** – **0** +	+ **0** +	+
a < 0			
Signe de f (x)	– **0** + **0** –	– **0** –	–