1 ère S 4 **Devoir Surveillé n ° 6**	**Barème :** **1)** *5 pts* **2)** *5 pts* **3)** *10 pts*	**nom :**	**voisin :**
- Durée 1 h 15 - Calculatrices autorisées		**voisin :**	**voisin :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante. Soyez propre et clair . Bonne chance …*

PRODUIT SCALAIRE

Ex1 :

A et B sont deux points distincts tels que AB = 2.
On considère le barycentre G de (A , 3) et (B , 1)

a) Construire le point G . Calculer GA et GB .

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; on a donc $GA = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}$

$G \in [AB]$, donc $GB = AB - GA = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) Pour tout pont M du plan, exprimer $3 MA^2 + MB^2$ en fonction de MG

Pour tout pont M du plan,

$$\begin{aligned} 3 MA^2 + MB^2 &= 3 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 3 (MG^2 + GA^2 + 2 \overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GA}) + (MG^2 + BG^2 + 2 \overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GB}) \\ &= 4 MG^2 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 6 \overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GB} \\ &= 4 MG^2 + 3 + 2 \overrightarrow{MG} . 3 \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GB} \\ &= 4 MG^2 + 3 + 2 \overrightarrow{MG} . (3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \\ &= 4 MG^2 + 3 \end{aligned}$$

c) Déterminer l'ensemble E des ponts M tels que

$$3 MA^2 + MB^2 = 4$$

$3 MA^2 + MB^2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad 4 MG^2 + 3 = 4$

$\Leftrightarrow \quad 4 MG^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad MG^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad MG = \frac{1}{2}$ Ainsi E est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$

d) Vérifier que A appartient à l'ensemble E .

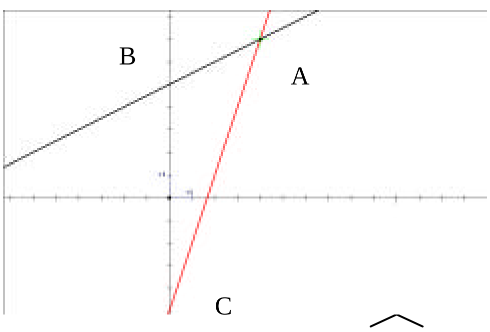
$GA = \frac{1}{2}$, donc $A \in E$

Ex2 :

Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ,d et d' sont deux droites d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 5$ et $y = 3x - 5$.

La droite d coupe l'axe des ordonnées en B, d' coupe l'axe des ordonnées en C et d et d' se coupent en A.

a) Faire une figure.



b) Donnez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

On a B (0 ; 5) et C (0 ; – 5)

$A \in d$ et $A \in d'$ donc l'abscisse de A vérifie l'équation :

$\frac{1}{2}x + 5 = 3x - 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 10 \Leftrightarrow x = 4$

On en déduit que A a pour coordonnées (4 ; 7)

Ainsi $\overrightarrow{AB}\,(-4\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;-12)$

Et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -4 \times (-4) + (-2) \times (-12) = 16 + 24 = 40$

D'autre part :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

Or $AB^2 = 16 + 4 = 20$, donc $AB = 2\sqrt{5}$

Et $AC^2 = 16 + 144 = 160$, donc $AC = 4\sqrt{10}$

On en déduit que :

$$2\sqrt{5} \times 4\sqrt{10} \times \cos \widehat{BAC} = 40$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \widehat{BAC} = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit que $\widehat{BAC} = 45°$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Ex3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

C est sa courbe représentative dans un repère.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 2 , $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

Pour tout réel x différent de 2 ,

$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2}$

Ainsi tout réel x différent de 2 ,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = ax^2 + (b - 2a)x - 2b + c$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \\ -2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

On en déduit que pour tout réel x différent de 2 , $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$

b) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis justifier que *C* admet une asymptote verticale d et une asymptote oblique d'.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - x - 1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$

Pout tout $x > 2$, $x - 2 > 0$; donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Pout tout x < 2 , x – 2 < 0 ; donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

On en déduit que la droite d : x = 2 est asymptote verticale à *C*

Soit d' : y = x + 1

Pour tout x ≠ 2 ,

$f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{x-2}$

et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

On en déduit que d' est asymptote oblique à *C*

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

f est une fonction rationnelle ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition

Pour tout x ≠ 2 , on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u : x \longmapsto x^2 - x - 1$ et $v : x \longmapsto x - 2$

On a $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 1$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 1)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

f' (x) est du signe de $x^2 - 4x + 3$

1 est racine évidente ; le produit des racines est égal à 3 . L'autre racine est donc 3

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	‖	–	0	+	
f	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

d) Etudier la position de *C* par rapport à d'

Pour tout x ≠ 2 ,

$f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{x-2}$

Si x > 2 , x – 2 > 0 et *C* est au dessus de d'

Si x < 2 , x – 2 < 0 et *C* est en dessous de d'

e) Tracer d, d' et *C* .