PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

1) PRODUIT SCALAIRE

A) DEFINITION

Ce n'est pas une multiplication …

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté **$\vec{u} \cdot \vec{v}$** est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y'$ où (x ; y) et (x' ; y') sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque .

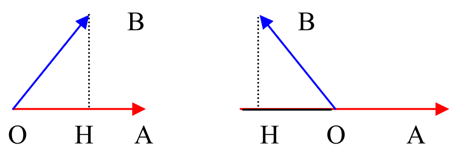
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -\,OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel** .

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

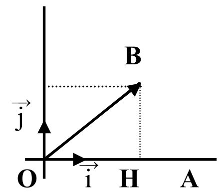
- Montrons que $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = x\,x' + y\,y'$ où (x ; y) et (x' ; y') sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque .

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y') , donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + x'^2 + 2\,x\,x' + y^2 + y'^2 + 2y\,y'$
et $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + 2\,x\,x' + y^2 + y'^2 + 2y\,y' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2) = x\,x' + yy'$

Rem: Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (X ; Y) et (X' ; Y') dans un autre repère orthonormal , on trouve de la même façon :
$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = X\,X' + Y\,Y'$$

- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = x\,x' + y\,y'$ où (x ; y) et (x' ; y') sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans un repère orthonormal bien choisi …

Choisissons un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens .
On note (x ; y) et (x' ; y') les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans ce repère .
On a alors : x = OA , y = 0 , $x' = OB \cos \widehat{AOB}$ et $y' = OB \sin \widehat{AOB}$



Ainsi $x\,x' + y\,y' = OA \cdot OB \cos \widehat{AOB} + 0 \times OB \sin \widehat{AOB} = OA \cdot OB \cos \widehat{AOB}$

- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -\,OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Dans le repère définit ci-dessus :

L'abscisse de H est celle de B , c'est à dire $OB \cos \widehat{AOB}$.

Ainsi $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times x_H$

Deux cas se présentent :

Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens , alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens et $x_H = OH$;

d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times OH$

Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire et $x_H = -OH$;

d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = -\ OA \times OH$

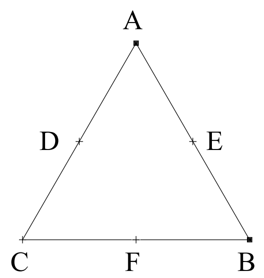
Ex 1 :

Soit A (2 ; 3) , B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

On a $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;1)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-1\,;-3)$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3) \times (-1) + (-3) \times 1 = 0$

Ex 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 3 (dans l'unité de longueur choisie) .
Les points E, F et D sont les milieux des côtés.
On a alors :



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$
- **ou** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AE = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = AB \times CE \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}) = AB \times CE \times \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- **ou** le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CE}$ sur (AB) est le vecteur nul , donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$

B) REMARQUES

➢ **Signe du produit scalaire :**

On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{AOB}$.

En effet les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est du signe de $\cos \widehat{AOB}$.

- Si $0 \leq \widehat{AOB} < 90°$, $\cos \widehat{AOB} > 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$
- Si $\widehat{AOB} = 90°$ (c'est à dire $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$) , $\cos \widehat{AOB} = 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
- Si $90 < \widehat{AOB} \leq 180°$, $\cos \widehat{AOB} < 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$

➢ **Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dépend de leur norme :**

le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 . On a donc :

$$-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

➢ **Un cas agréable : les vecteurs colinéaires**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$. Ainsi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire** , alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$. Ainsi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

C) COMPLEMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

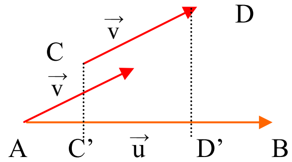
➢ D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

En effet $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$ Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.

  Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB) , alors :

  $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs , on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIETES

A) OPERATIONS VECTORIELLES

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Linéarité

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$

conséquence :

$a \vec{u} \cdot b \vec{v} = ab\, \vec{u} \cdot \vec{v}$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

On se place dans un repère orthonormal (utile pour la preuve seulement) et on note (x ; y) , (x' ; y') et (x'' ; y'') les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Montrons l'égalité $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; *les autres égalités se montrent de la même façon .*

$\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées (x' + x'' ; y'+ y'') .

Donc

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x (x' + x'') + y (y' + y'') = x x' + x x'' + y y' + yy'' = (x x' + y y') + (x x'' + y y'') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Ex :

- $(3 \vec{u} - 2 \vec{v}) \cdot (2 \vec{u} + \vec{v}) =$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :

  - « $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ » :
  - « $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ » :
  - « $\vec{u} \cdot (k + \vec{v})$ » :

Rem :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

En effet, on peut avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

D'autre part $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

B) CARRE SCALAIRE ET NORME

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^{\,2}$.

On a :

$$\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{u} \| = \| \vec{u} \|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :

$$\overrightarrow{AB}^{\,2} = \| \overrightarrow{AB} \|^2 = AB^2$$

Rem :

- $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^{\,2} = 1$
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers)

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$, $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITE

Dans un repère orthonormal, on considère les deux vecteurs $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si **leur produit scalaire est nul**

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\ .\ \vec{v} = 0$

Preuve :

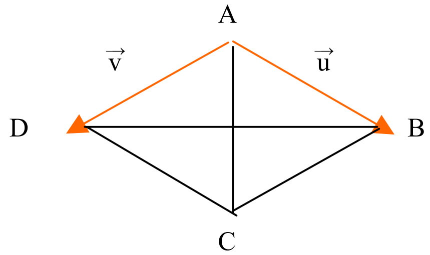
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  On a $\vec{u}\ .\ \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$
  Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$, ainsi :
  $\vec{u}\ .\ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Rem :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.

  $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\ .\ \vec{v} + \vec{u}\ .\ \vec{w}$ et $\vec{u}\ .\ \vec{w} = 0$ …
- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u}\ (x, y)$ et $\vec{v}\ (x', y')$ est $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
  On en déduit que :
  $$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad x\,x' + y\,y' = 0$$

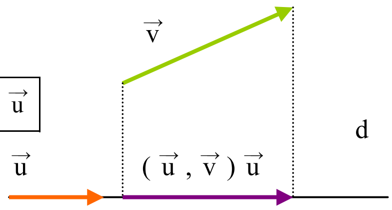
Ex :
Soit ABCD un parallèlogramme.
En posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, on retrouve que ABCD est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires .



En effet $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Ainsi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux .

4) COORDONNEES D'UN VECTEUR

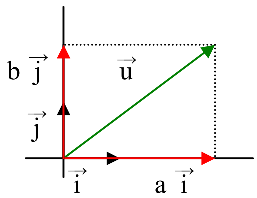


La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe d muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $(\vec{u}\ .\ \vec{v})\ \vec{u}$

Preuve :
Appelons $p(\vec{v})$ ce projeté .
$p(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{u}$, il existe donc un réel k tel que $p(\vec{v}) = k\,\vec{u}$.
De plus on a vu que $\vec{u}\ .\ \vec{v} = \vec{u}\ .\ p(\vec{v})$
Ainsi $\vec{u}\ .\ \vec{v} = \vec{u}\ .\ (k\,\vec{u}) = k$ (car $\vec{u}$ est unitaire) ; on en déduit que $p(\vec{v}) = (\vec{u}\ .\ \vec{v})\ \vec{u}$

Une conséquence pour les coordonnées d'un vecteur :

Soit $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{u}\ (a\ ;\ b)$ un vecteur du plan .
On a :
$$a = \vec{u}\ .\ \vec{i} \qquad \text{et} \qquad b = \vec{u}\ .\ \vec{j}$$



Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ *sur* $(O\ ;\ \vec{i})$ *est* $a\,\vec{i}$ *mais aussi* $(\vec{u}\ .\ \vec{i})\ .\ \vec{i}$ …