

- Durée 1 h 30
- Calculatrices autorisées

Barème :

1) 3 pts 2) 3,5 pts 3) 3 pts

4) 4 pts 5) 3,5 pts 6) 3 pts

nom :

voisin :

voisin :

voisin :

Commentaires : Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La rédaction est importante. Soyez propre et clair. Bonne chance ...

SUITES NUMERIQUES

Ex1 :

Soit le nombre $a = 1,714714714\dots$ comprenant une partie décimale illimitée de période 714.

En utilisant $a_n = 1,714714714\dots 714$, le nombre comprenant n périodes, écrire a sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{714}{10^3} + \frac{714}{10^6} + \dots + \frac{714}{10^{3n}} \\ &= 1 + 714 \left(\frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10^3}\right)^n \right) \\ &= 1 + 714 \frac{1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^3}} \\ &= 1 + \frac{714}{999} \left(1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{714}{999} \left(1 - \left(\frac{1}{10^3}\right)^n \right) \right) = 1 + \frac{714}{999} = \frac{1713}{999} = \frac{571}{333}$$

Ex2 :

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

a) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque $a = b$?

b) Exprimer u_n en fonction du quotient $\frac{a}{b}$. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque $a < b$?

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque $a > b$? Justifier la réponse.

a) Si $a = b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{\frac{a^n}{b^n} - 1}{\frac{a^n}{b^n} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

Si $a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 + \frac{b^n}{a^n}} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Si $a > b$, alors $\frac{b}{a} < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Ex3 : Limite d'une somme

v est la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}}$$

Démontrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Pour tout $p \in \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n \}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2 + p}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 1}}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n}{\sqrt{2n^2 + n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 1}}$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

PROBABILITES

Ex 4 :

En informatique, on appelle octet une suite de huit chiffres pris dans l'ensemble $\{ 0 ; 1 \}$

Par exemple 01001110 et 10000110 sont des octets.

1) Combien peut-on former d'octets différents ?

D'après le principe multiplicatif, il y a 2^8 octets différents.

2) On écrit au hasard un octet.

a) Calculer la probabilité des événements A et B;

A : " L'octet contient 1 aux deux premières places "

B : " l'octet se termine par 0 "

On écrit un octet au hasard, toutes les issues sont donc équiprobables.

place 1	place 2	place 3	place 4	place 5	place 6	place 7	place 8
1	1	?	?	?	?	?	?

$$1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

D'après le principe multiplicatif, $\text{card} (A) = 2^6$

$$\text{On a donc } P (A) = \frac{2^6}{2^8} = \frac{1}{4}$$

place 1	place 2	place 3	place 4	place 5	place 6	place 7	place 8
?	?	?	?	?	?	?	0

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^7$$

D'après le principe multiplicatif, $\text{card} (B) = 2^7$

$$\text{On a donc } P (A) = \frac{2^7}{2^8} = \frac{1}{2}$$

b) Calculer la probabilité de l'événement A ou B.

Pour cela, il est nécessaire de d'abord calculer la probabilité de l'événement A et B :

place 1	place 2	place 3	place 4	place 5	place 6	place 7	place 8
1	1	?	?	?	?	?	0

$$1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^5$$

D'après le principe multiplicatif, $\text{card} (A \cap B) = 2^5$

$$\text{On a donc } P(A \cap B) = \frac{2^5}{2^8} = \frac{1}{8}$$

Ainsi ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Ex 5 :

Mehdi dispose de 10 paires de chaussures distinctes.

Il les jette en vrac dans une caisse.

Il extrait , l'une après l'autre et au hasard, 4 chaussures de cette caisse.

Quelle est la probabilité qu'il dispose d'une paire (au moins) de chaussures assorties ?

1) Il y a 20 chaussures dans la caisse.

Il extrait les chaussures l'une après l'autre .

D'après le principe multiplicatif, il y a donc $20 \times 19 \times 18 \times 17$ issues possibles.

On note A , l'évènement : " une paire de chaussure au moins est assortie "

Nous allons tout d'abord calculer la probabilité de l'évènement \bar{A} : " il n'y a aucune paire de chaussures assorties "

Il y a 20 possibilités pour le premier tirage, 18 pour le second (il ne doit pas tirer la chaussure assortie au premier tirage) , 16 pour le troisième et 14 pour le quatrième.

Ainsi, d'après le principe multiplicatif, il y a $20 \times 18 \times 16 \times 14$ issues réalisant \bar{A} .

Mehdi extrait les chaussures au hasard, les issues sont donc équiprobables.

On a donc :

$$P(\bar{A}) = \frac{20 \times 18 \times 16 \times 14}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{224}{323}$$

et ainsi :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{224}{323} = \frac{99}{323}$$

Conseil :

Caculer tout d'abord la probabilité de l'évènement contraire !

De façon générale, ce conseil est très utile dès que l'on voit l'expression " au moins "

Ex 6 :

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble E des couples $(x ; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est muni de de la loi équirépartie. (c'est à dire toutes les issues sont équiprobables)

A chaque couple $(x ; y)$, ont associe $|x - y|$.

On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E .

1) Définir la loi de probabilité de X .

E est l'ensemble des 36 couples de faces (équiprobables)

6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
y						
x	1	2	3	4	5	6

Loi de X :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2) Calculer l'espérance et la variance de X .

$$E(X) = \frac{35}{18} ; V(X) = \frac{665}{324} \approx 2,052$$