2 heures

Première s Contrôle de Mathématiques

<u>Exercice I</u>. Calculs de limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{1-2x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to0+} 3-x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to1+} \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)(x-2)$ f) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

<u>Exercice II</u>.

Soit f la fonction définie sur R- $\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal. Déterminez a, b, c pour que (C) ait les propriétés suivantes :

- (C) passe par le point A(0 ; 5)
- la tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur – 3.

Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.
Tracer (C).

<u>Exercice III</u>. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x^2}$; Γ sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4}$.

a) Etudier la fonction h, dresser son tableau de variation et préciser la tangente à Γ au point d'abscisse 2.
b) Montrer que Δ est asymptote de Γ.
c) Représenter Γ et Δ sur un même graphique (unité 2 cm).

<u>Exercice IV</u>. Soit la fonction f définie sur **R** – {–2 ; 5}, par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$.

1. Montrer que, pour tout x de **R** – {–2 ; 5}, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-5}$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

2. Étudier les variations de f ; dresser son tableau de variation. On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Soit C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

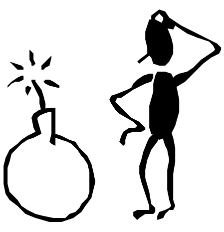
3.a. Montrer que C possède trois asymptotes dont on donnera une équation.

3.b. Étudier la position relative de C par rapport à son asymptote horizontale.
Préciser en particulier les coordonnées du point I, où C coupe son asymptote horizontale.

3.c. Déterminer l'équation réduite de la droite T, tangente à C au point I.

3.d. T coupe C en un point J. Déterminer les coordonnées de J.

3.e. Construire C, T et les trois asymptotes à C.



CORRECTION

Exercice I.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)^2}{1-2x^2} = -1/2$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = 4$ c) $\lim\limits_{x\to 0+} 3-x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3$

d) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = -\infty$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)(x-2) = -\infty$ f) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9} = 4/9$

Exercice II.

Les conditions se traduisent par : $f(0) = 5$; $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -3$;

on obtient $a = 1$; $b = 5$ et $c = -10$ d'où $f(x) = \dfrac{x^2+5x-10}{x-2}$

et $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ $f(4) = 13$

Exercice III.

Rappel $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + 2\,ab + b^2)$; $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{4x^3} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4x^3}$

$x = 0$ est asymptote verticale ; $y = \dfrac{x}{4}$ asymptote oblique

tangente horizontale au point d'abscisse 2

Exercice IV. Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{-2\,;\,5\}$, par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$.

1. $a = 1$; $b = 4/7$ et $c = 24/7$

2. $f'(x) = \dfrac{-4/7}{(x+2)^2}+\dfrac{-24/7}{(x-5)^2}$ somme de nombres négatifs, la dérivée est négative et la fonction est décroissante.

3.

3.a. avec les limites on montre que $x = -2$; $x = 5$ et $y = 1$ sont asymptotes verticales et horizontale.

3.b. En $-\infty$ la courbe est en-dessous de $y = 1$ et l'inverse en $+\infty$

I $(-1\,;\,1)$

3.c. y = -2/3 x + 1/3