

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

1. Etudier le sens de variation et les limites de f .
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
4. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ?
5. Montrer que le point $A(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f .

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} . (sens de variation et limites)
2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position relative à C_f .
3. Soit la parabole P d'équation : $y = x^2 - 2x + 1$.
 - a) Préciser les éléments caractéristiques de P .
 - b) Vérifier que le point $A(2; 1)$ est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P .
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à P .
4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Exercice n°3 :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$.

M est un point variable sur $[DC]$: on pose $DM = x$. Les droites (AM) et (DB) se coupent en I .

On désigne par $S(x)$ la somme des aires de triangles ABI et DIM .

1. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
2. Démontrer que la hauteur IK du triangle ABI est égale à $\frac{2}{x + 1}$.
3. En déduire que : $S(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.
4. Pour quelle valeur de x , $S(x)$ est-elle minimale ? Que vaut cette aire minimale ?

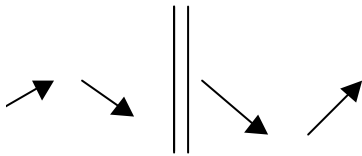
Bon travail !

Exercice n°1 :

1. $f : x \rightarrow \frac{x^2+3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, de dérivée : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
- Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x)$ a le signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2 > 0$.
 - x^2-2x-3 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 3 .
 - f est donc croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$, et f est décroissante sur $]-1; 1[$ et sur $]1; 3]$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+3) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+3) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$.

2. $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{12}{2} = 6$.



x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
f	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	6

3. Après division, $x^2+3 = (x+1)(x-1)+4$. Pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = x+1 + \frac{4}{x-1}$.

4. La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$.

$f(x) = x+1 + \frac{4}{x-1}$ } \Rightarrow La courbe C_f de f admet pour asymptote oblique la droite $D: y = x+1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0$

5. $A(1;2)$ est un centre de symétrie de C_f car :

$$f(1-x) + f(1+x) = 1-x+1 + \frac{4}{1-x-1} + 1+x+1 + \frac{4}{1+x-1} = 4 = 2 \times 2 \text{ et } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ est centré en } 1.$$

Exercice n°2 :

1. $f : x \rightarrow x^3 - 3x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
- Sur \mathbb{R} , $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 1$.
 - $x^2 - 1$ est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 1 .
 - f est donc croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, et f est décroissante sur $]-1; 1]$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
2. Une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y = -3(x-0) - 1$; soit $y = -3x - 1$.
- $f(x) - (-3x - 1) = x^3$. Or $x^3 \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et $x^3 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
- C_f est donc au-dessus de T_0 sur $[0; +\infty[$ et C_f est donc au-dessous de T_0 sur $]-\infty; 0]$.
3. Soit la parabole $P : y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + 0$.
- P est une parabole de sommet $S(1;0)$, d'axe la droite $\Delta : x = 1$ et orientée vers le haut.
 - $f(2) = 2^3 - 3 \times 2 - 1 = 1$ et $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$. Le point $A(2;1)$ est un point des deux courbes C_f et P .
 - $f(x) - (x^2 - 2x + 1) = x^3 - x^2 - x - 2$. On vérifie que 2 est racine de $x^3 - x^2 - x - 2$.

Après division, $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$. Or $x^2 + x + 1$ est toujours positif car son discriminant est négatif et le coefficient de x^2 est positif. $x^3 - x^2 - x - 2$ est donc du signe de $x - 2$.

C_f est donc au-dessus de P sur $[2; +\infty[$ et C_f est donc au-dessous de P sur $]-\infty; 2]$.

4. Courbes C_f et P .

Exercice n°3 :

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 1$ et $AD = 2$. M est un point variable sur $[DC]$: on pose $DM = x$. Les droites (AM) et (DB) se coupent en I . On désigne par $S(x)$ la somme des aires de triangles ABI et DIM .

1. Calcul de $S(0)$ et $S(1)$.

Si $x = 0$, $M = D$ et $S(0)$ est l'aire du triangle ABD ; soit $S(0) = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

Si $x = 1$, $M = C$ et $S(1)$ est la somme des aires des triangles ABI et DIC ; soit $S(1) = \frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} = 1$.

2. Calcul de IK .

Dans les triangles IBA et IDM , les points B, I, D et A, I, M sont alignés et (AB) et (DM) sont parallèles.

On peut donc utiliser Thalès : $\frac{ID}{IB} = \frac{IM}{IA} = \frac{DM}{BA} \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{x}{1} \Rightarrow ID = xIB$.

Dans les triangles BIK et BDA , les points B, I, D et B, K, A sont alignés et (AD) et (KI) sont parallèles.

On peut donc utiliser Thalès : $\frac{BI}{BD} = \frac{BK}{BA} = \frac{IK}{DA} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{IK}{2} \Rightarrow \frac{BI}{BI + ID} = \frac{IK}{2}$.

Or $ID = xIB$. On obtient ainsi : $\frac{BI}{BI + xBI} = \frac{IK}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{IK}{2} \Leftrightarrow IK = \frac{2}{1+x}$.

La hauteur IH du triangle DIM est

3. Calcul de $S(x)$.

La hauteur IH du triangle DIM est obtenue par : $IH = 2 - \frac{2}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$.

On obtient ainsi : $S(x) = \frac{AB \times IK}{2} + \frac{DM \times IH}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{1+x} + \frac{1}{2} \times x \times \frac{2x}{1+x}$; soit $S(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$.

4. M est un point variable sur $[DC]$ et $DM = x$ appartient à $[0; 1]$.

$S : x \rightarrow \frac{1+x^2}{1+x}$ dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc sur $[0; 1]$, de dérivée : $S'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$.

- Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $S'(x)$ a le signe de $x^2 + 2x - 1$ car $(1+x)^2 > 0$.
- $x^2 + 2x - 1$ est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.
- S est décroissante sur $[0; -1 + \sqrt{2}]$ et croissante sur $[-1 + \sqrt{2}; 1]$.

$S : x \rightarrow \frac{1+x^2}{1+x}$ admet donc un minimum en $x = -1 + \sqrt{2}$ égal à $S(-1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.

$S(x)$ est donc minimale pour $x = -1 + \sqrt{2}$ et cette aire minimale vaut $2\sqrt{2} - 2$.