1 ère S 4 **Devoir Surveillé n ° 5**

- Durée 2
- Calculatrices autorisées

Barème :	**nom :**	**voisin :**
1) *3 pts* **2)** *3 pts* **3)** *4 pts*		
4) *3 pts* **5)** *7 pts*	**voisin :**	**voisin :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante. Soyez propre et clair . Bonne chance …*

STATISTIQUES

Ex1 :

La moyenne de la classe à un devoir est 11,2 et l'écart type est 1,8.
Quelle transformation affine $x \longmapsto ax + b$ (avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$) appliquer à la série des notes afin de se ramener à une moyenne égale à 0 et un écart type égal à 1 ?

On note x l'ancienne note et y la nouvelle note .
Avec les notations usuelles pour la moyenne et l'écart type, on a :

$$\begin{cases} \overline{y} = a\,\overline{x} + b \\ s_y = |a|\,s_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 11{,}2\,a + b \\ 1 = 1{,}8\,a \end{cases} \quad \ldots \text{ On trouve } y = \frac{x - 11{,}2}{1{,}8}$$

Ex 2 :

On considère la série statistique suivante :

Valeur	x_1	x_2	…	x_p	Total
Effectif	n_1	n_2	…	n_p	N

Calculer $\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{p} (n_i\,x_i - n_i\,\overline{x}) = \sum_{i=1}^{p} n_i\,x_i - \sum_{i=1}^{p} n_i\,\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} n_i\,x_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{p} n_i = N\,\overline{x} - N\,\overline{x} = 0$

DERIVATION

Ex 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

a) Prouver que la tangente à C au point M de C d'abscisse a , a pour équation $y = (2a + 2)x - a^2 + 1$

La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f'(x) = 2x + 2$

La tangente a C au point d'abscisse a a pour équation :
$y = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow y = (2a + 2)(x - a) + a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow y = (2a + 2)x - a^2 + 1$

b) Déterminer les équations réduites des deux tangentes à C issues du point A (0 ; – 1)

Les tangente à C issues du point A ont une équation de la forme $y = (2a + 2)x - a^2 + 1$ et passent biensûr par A , donc … :
$-1 = (2a + 2)\,0 - a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$

On obtient

$$y = (2\sqrt{2} + 2)x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = (2\sqrt{2} + 2)x - 1$$

Et

$$y = (-2\sqrt{2} + 2)x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = (-2\sqrt{2} + 2)x - 1$$

c) Tracer C et les deux tangentes

Ex 4 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f
$D_f = \mathbb{R} - \{ -2 \}$

b) Etudier les variations de f
f est une fonction rationnelle ; elle est dons dérivable sur son ensemble de définition, c'est à dire $\mathbb{R} - \{ -2 \}$

Pour tout $x \neq 2$, on a :

$f'(x) = \ldots = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

$f'(x)$ est du signe de $x^2 + 4x + 1$

Les racines de $x^2 + 4x + 1$ sont …. $x_1 = -\sqrt{3} - 2$ et $x_2 = \sqrt{3} - 2$

On en déduit les variations de f

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	
f		↗	$f(x_1)$	↘	‖	↘	$f(x_2)$	↗	

$f(x_1) = -2\sqrt{3} - 4$

$f(x_2) = 2\sqrt{3} - 4$

c) Déterminer ses extrémas éventuels

f admet pour maximun local $-2\sqrt{3} - 4$ en $-\sqrt{3} - 2$

f admet pour minimum local $2\sqrt{3} - 4$ en $\sqrt{3} - 2$

<u>Ex 5 :</u>

Soit f une fonction, dérivable sur un intervalle E, et dont la dérivée vérifie, pour tout x de E , $m \leq f'(x) \leq M$ (càd la dérivée est bornée)

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle E, par $g(x) = f(x) - mx$.

a) Montrer que la fonction g est croissante sur E.

f est dérivable sur E et la fonction $x \longmapsto -mx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur E

On en déduit que g est dérivable sur E (somme de deux fonctions dérivable sur E)

Et pour tout $x \in E$, on a :

$$g'(x) = f'(x) - m$$

Pour tout $x \in E$, on a : $m \leq f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - m \geq 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

On en déduit que g est croissante sur E.

b) En déduire que, si a et b sont deux éléments de E vérifiant $a < b$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$

Soit a et b deux éléments de E vérifiant $a < b$.

g est croissante sur E, donc :

$$g(a) \leq g(b) \Leftrightarrow f(a) - ma \leq f(b) - mb \Leftrightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a)$$

2) On considère la fonction h définie sur l'intervalle E, par $h(x) = f(x) - Mx$.

a) Montrer que la fonction h est décroissante sur E.

f est dérivable sur E et la fonction $x \longmapsto -Mx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur E

On en déduit que h est dérivable sur E (somme de deux fonctions dérivable sur E)

Et pour tout $x \in E$, on a :

$$h'(x) = f'(x) - M$$

Pour tout $x \in E$, on a : $f'(x) \leq M \Leftrightarrow f'(x) - M \leq 0 \Leftrightarrow h'(x) \leq 0$

On en déduit que h est décroissante sur E.

b) En déduire que, si a et b sont deux éléments de E vérifiant $a < b$, alors $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Soit a et b deux éléments de E vérifiant $a < b$.

h est décroissante sur E, donc :

$$h(a) \geq h(b) \Leftrightarrow f(a) - Ma \geq f(b) - Mb \Leftrightarrow f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

3) Déduire des questions 1) et 2) un encadrement de l'accroissement de la fonction f entre a et b.

On a $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

4) Soit f , la fonction racine carrée, définie sur l'intervalle [1 ; 4] , noté E.

a) Prouver que, pour tout x de E, la dérivée de f vérifie :

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc sur [1 ; 4]

Et pour toux $x \in [1 ; 4]$, on : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On a $1 \leq x \leq 4$ donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{4}$ (car $x \longmapsto \sqrt{x}$ croissante sur $]0 ; +\infty[$)
Donc $2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$ cad $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire un encadrement de $\sqrt{b}$ avec b élément de E.

Sur $[1 ; 4]$, on a $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

On a $b \in [1 ; 4]$; donc sur $[1 ; b]$, on a aussi $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

En appliquant le résultat de la question 3) sur l'intervalle $[1; b]$, on obtient :

$$\frac{1}{4}(b-1) \leq f(b) - f(1) \leq \frac{1}{2}(b-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{4} - \frac{1}{4} + 1 \leq \sqrt{b} \leq \frac{b}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b+3}{4} \leq \sqrt{b} \leq \frac{b+1}{2}$$

c) En déduire un encadrement des nombres $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{1,01}$

$$\frac{4,1}{4} \leq \sqrt{1,1} \leq \frac{2,1}{2} \Leftrightarrow 1,025 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$$

$$\frac{4,01}{4} \leq \sqrt{1,01} \leq \frac{2,01}{2} \Leftrightarrow 1,0025 \leq \sqrt{1,01} \leq 1,005$$