Devoir Surveillé
Maths 1S1
22 mars 2004

Exercice ❶ (6,5 points)

Soit A, B, C trois points non alignés.

Soit D le barycentre de {(B ; 2) , (C ; 4)}, E le barycentre de {(C ; 4) , (A ; 1)}, F le barycentre de {(B ; 2) , (A ; 1)} et G le barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 4)}.

1. Construire les points D, E, et F.
2. Démontrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en G.
3. a) Montrer que B est barycentre de {(C ; – 2) , (D ; 3)}.
   b) Trouver les coefficients d et b tels que C soit barycentre de {(D ; d) , (B ; b)}.

Exercice ❷ (2 points)

ABC est un triangle. J et L sont définis par : $\vec{AJ} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ et $\vec{AL} = 3\,\vec{AC}$.

La droite parallèle à (AC) menée par J coupe la droite (BC) en K.

1. Exprimer L comme barycentre des points A et C.
2. Exprimer K est comme barycentre de B et C.

Exercice ❸ (5,5 points)

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit A, B , C et D les points de coordonnées respectives (3 ; 3) , (–1 ; – 1) , (– 2 ; – 3) et (3 ; – 3).

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que BCDE soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre G de {(A ; 2) , (B ; 1) , (C ; 1) , (D ; 1) , (E ; 1)}.
3. Soit L le centre du parallélogramme BCDE. Démontrer que les points A , G et L sont alignés.
4. a) Démontrer que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0}$.
   b) Que représente le point G pour le triangle ABD ?
5. Soit I le milieu de BC et J le milieu de DE. Montrer que G est l'isobarycentre du triangle AIJ.

Exercice ❹ (6 points)

Soit un triangle ABC tel que AC = 12, BA = 10 et CB = 8.

1. Construire le barycentre G de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 1)}.
2. Déterminer et représenter l'ensemble î$_1$ des points M tels que $\|\vec{MA} + 2\,\vec{MB} + \vec{MC}\| = AC$
3. Soit î$_2$ l'ensemble des points N tels que $\|\vec{NA} + 2\,\vec{NB} + \vec{NC}\| = \|\vec{NA} - 2\,\vec{NB} + \vec{NC}\|$.

   a) Montrer que le point B appartient à î$_2$.

   b) Déterminer et représenter l'ensemble î$_2$.

4. Déterminer et représenter l'ensemble Γ_3 des points P tels que $\|\overrightarrow{PA} + 2\,\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\| = \|3\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{PC}\|$.

Correction
Maths 1S1
22 mars 2004

Exercice ❶

1. Construction de D : $2\,\overrightarrow{MB} + 4\,\overrightarrow{MC} = 6\,\overrightarrow{MD}$. Soit M = B, on a : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

   Construction de E : $\overrightarrow{MA} + 4\,\overrightarrow{MC} = 5\,\overrightarrow{ME}$. Soit M = A, on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.

   Construction de F : $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MF}$. Soit M = A, on a : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. G barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 4)}
   D barycentre de { (B ; 2) , (C ; 4)} donc : G barycentre de {(A ; 1) , (D ; 6)} et G, A, D sont alignés.
   G barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 4)}
   E barycentre de {(A ; 1) , (C ; 4)} donc : G barycentre de {(B ; 2) , (E ; 5)} et G, B, E sont alignés.
   G barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 4)}
   F barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) } donc : G barycentre de {(C ; 4) , (F ; 3)} et G, C, F sont alignés.

   Conclusion : $\boxed{\text{les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en G}}$.

3. a) D'après 1., on a : $3\,\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ donc : $3\,\overrightarrow{BD} - 2\,\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d'où $\boxed{\text{B est barycentre de } \{(C ; -2) , (D ; 3)\}}$.

   b) $3\,\overrightarrow{BD} - 2\,\overrightarrow{BC} = \vec{0} \iff 3\,\overrightarrow{BC} + 3\,\overrightarrow{CD} - 2\,\overrightarrow{BC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{BC} - 3\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

   $\iff \boxed{\text{C soit barycentre de } \{(D ; -3) , (B ; 1)\}}$.

Exercice ❷

1. $\overrightarrow{AL} = 3\,\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AL} - 3\,\overrightarrow{AL} - 3\,\overrightarrow{LC} \iff -2\,\overrightarrow{AL} + 3\,\overrightarrow{CL} = \vec{0} \iff \boxed{\text{L barycentre de } \{(A ; -2) , (C ; 3)\}}$.
2. D'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC où (AC) et (JK) sont parallèles, on a :

   $\frac{AJ}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{2}{5}$ donc : $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} \iff 5\,\overrightarrow{CK} - 2\,\overrightarrow{CB} = \vec{0} \iff 5\,\overrightarrow{CK} - 2\,\overrightarrow{CK} - 2\,\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

   $\iff 3\,\overrightarrow{CK} + 2\,\overrightarrow{BK} = \vec{0} \iff \boxed{\text{K barycentre de } \{(C ; 3) , (B ; 2)\}}$.

Exercice ❸

1. Dire que BCDE est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$.

   On a $\overrightarrow{CD}$ (5 ; 0) et $\overrightarrow{BE}$ ($x_E + 1$; $y_E + 1$). On en déduit que $\boxed{E\,(4\,;-1)}$.

2. $6\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$ si on prend M = O, on obtient : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$

   d'où : $x_G = \frac{1}{6}(2 \times 3 - 1 - 2 + 3 + 4) = \frac{5}{3}$ et $y_G = \frac{1}{6}(2 \times 3 - 1 - 3 - 3 - 1) = -\frac{1}{3}$ donc : $\boxed{G\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)}$.

3. Le centre du parallélogramme est aussi l'isobarycentre des sommets de celui si donc :

   L barycentre de {(B ; 1) , (C ; 1) , (D ; 1) , (E ; 1)}

   G barycentre de {(A ; 2) , (B ; 1) , (C ; 1) , (D ; 1) , (E ; 1)} d'où : G barycentre de {(A ; 2) , (L ; 4)}

   Conclusion : $\boxed{\text{Les points A, G et L sont alignés}}$.

4. a) $\overrightarrow{GA}\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$ $\overrightarrow{GB}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ $\overrightarrow{GD}\left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ donc : $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}}$.

   b) $\boxed{\text{G est le centre de gravité de ABD}}$.

5. I est le milieu de BC, on a alors : I barycentre de {(B ; 1) , (C ; 1)}

   J est le milieu de DE, on a alors : J barycentre de {(D ; 1) , (E ; 1)}

   et comme G est barycentre de {(A ; 2) , (B ; 1) , (C ; 1) , (D ; 1) , (E ; 1)}, avec le barycentre partiel, on peut affirmer que G est barycentre de {(A ; 2) , (I ; 2) , (J ; 2)}, c'est donc $\boxed{\text{l'isobarycentre de AIJ}}$.

Exercice ❹

1. Soit I barycentre de {(A ; 1) , (C ; 1)}, alors I est le milieu de AC.

   G est alors barycentre de {(B ; 2) , (I ; 2)}, il est donc placé au milieu de BI.

2. $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ donc : $\|4\overrightarrow{MG}\| = AC \Leftrightarrow 4\,MG = 12 \Leftrightarrow MG = 3.$

   $\boxed{\text{î}_1 \text{ est le cercle de centre G de rayon 3}}$.

3. a) Si on remplace N par B dans l'expression de gauche, on obtient : $\|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$

   Si on remplace N par B dans l'expression de droite, on obtient : $\|\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$

   On obtient le même chose donc : $\boxed{\text{Le point B appartient à î}_2}$.

   b) L'expression est équivalente à : $\|4\overrightarrow{NG}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$ ou encore : $NG = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$

   $\boxed{\text{î}_2 \text{ est le cercle de centre G de rayon } \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|}$

   Pour le construire, il faut préciser que c'est le cercle de centre G passant par B.

4. Soit G barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 1)} et H barycentre de {(A ; 3) , (B ; – 1) , (C ; 2)}.

ξ_3 est l'ensemble des points P tels que $\| 4\overrightarrow{PG} \| = \| 4\overrightarrow{PH} \| \Leftrightarrow 4\,PG = 4\,PH \Leftrightarrow PG = PH$

$\boxed{\xi_3 \text{ est la médiatrice de } GH}$.

Construction de H : Soit K barycentre de {(A ; 3) , (B ; – 1)}, alors $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MK}$

EN remplaçant M par A, on obtient : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

H est alors le barycentre de {(K ; 2) , (C ; 2)}, c'est à dire le milieu de KC.