Lycée Victor Hugo
MARRAKECH

Mathématiques
J 06-03-03

Classe de 1ère S1

<u>Exercice n°1</u> : (5 points)

ABC est un triangle. *I* et *G* sont définis par : $\overrightarrow{AI} = -2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$.

1. Exprimer *G* comme barycentre des points *A*, *B* et *C*.
2. La droite (*BG*) coupe le segment [*AC*] en un point *J*. Déterminer la position de *J* sur [*AC*].
3. Déterminer et tracer l'ensemble des points *M* du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} \right\|$.

<u>Exercice n°2</u> : (4 points)

ABC est un triangle. *I* est milieu de [*AB*]. *J* et *L* sont définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$.

La droite parallèle à (*AC*) menée par *J* coupe la droite (*BC*) en *K*.

1. Exprimer *I* comme barycentre de *A* et *B*, et *L* comme barycentre des points *A* et *C*.
2. Exprimer *K* est comme barycentre de *B* et *C*.
3. Démontrer que les points *I*, *K* et *L* sont alignés et préciser la position de ces trois points.

<u>Exercice n°3</u> : (5 points)

ABC est un triangle. (*les deux questions sont indépendantes*)

1. Montrer que la somme des carrés des médianes est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.
2.
   a) Montrer que, pour tout point *M* du plan : $\overrightarrow{MA}.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\,\overrightarrow{AB} = 0$
   b) En déduire que les trois hauteurs sont concourantes.

<u>Exercice n°4</u> : (6 points)

Dans un plan, muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on donne les points *A*(-1 ;3), *B*(1 ;1) et *C*(-4 ;0).

1. Calculer les coordonnées du point *G* barycentre de (*A* ;4) ; (*B* ;3) et (*C* ;5).
2. Soit l'expression $h(M)=\overrightarrow{MA}.\,\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MC}.\,\overrightarrow{MA}$. .
   a) Calculer $h(G)$.
   b) Exprimer $h(M)$ en fonction de MG^2 et $h(G)$.
   c) Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que : $h(M) = 18$.

Bon travail !

Corrigé 07 du J 06-03

<u>Exercice n°1</u> :

1. $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ barycentre de (A ;3) et (B ;-2), affecté du coefficient 1.

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI} \Rightarrow G$ barycentre de (I ;1) et (C ;4), et par associativité, G est donc barycentre de (A ;3) , (B ;-2) et (C ;4).

2. La droite (BG) coupe le segment [AC] en un point J. Soit K barycentre de (A ;3) et (C ;4) appartient à $[AC]$.

Par associativité, G est barycentre de (B ;-2) et (K ;7) et $G \in (BK) \Leftrightarrow K \in (BG)$.

J et K sont donc confondus et ainsi : J barycentre de (A ;3) et $(C\,;4) \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.

3. $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IA}$. On obtient : $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right\| \Leftrightarrow MI = IA$.

L'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right\|$ est donc le cercle de centre I et de rayon IA.

<u>Exercice n°2</u> :

1. I milieu de [AB] est barycentre de (A ;1) et (B ;1) et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow L$ barycentre de (A ;-2) et (C ;3).
2. La droite parallèle à (AC) menée par J coupe la droite (BC) en K.

D'après Thalès, $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ et K est donc barycentre de (B ; 2) et (C ; 3).

3. K barycentre de (B ; 2) et (C ; 3) est aussi barycentre de (B ;2) , (A ;2) , (A ;-2) et (C ;3) (point « virtuel » A).

Par associativité, K est barycentre de (I ;4) et (L ;1). Les points I, K et L sont donc alignés et $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IL}$.

<u>Exercice n°3</u> :

1. Un des théorèmes de la médiane appliqué trois fois aux médianes du triangle ABC permet d'écrire :

$$AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right),\ BJ^2 = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}\right) \text{ et } CK^2 = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}\right).$$

$$AI^2 + BJ^2 + CK^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} + BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2} + CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}\right) = \ldots = \frac{3}{4}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right).$$

La somme des carrés des médianes est donc égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.

2. Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}.\\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}.\\ &= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}).\\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}.\\ &= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) = 0.\end{aligned}$$

Soit H le point d'intersection des deux hauteurs du triangle ABC issues de A et de B.

(AH) $\perp$ (BC) $\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et (BH) $\perp$ (AC) $\Rightarrow \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Or $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

H appartient à la hauteur issue de C et les trois hauteurs sont donc concourantes.

<u>Exercice n°4</u> : G barycentre de $(A;4)$, $(B;3)$ et $(C;5)$

1. $x_G = \frac{4\times -1 + 3\times 1 + 5\times -4}{4+3+5} = \frac{-21}{12} = \frac{-7}{4}$ et $y_G = \frac{4\times 3 + 3\times 1 + 5\times 0}{4+3+5} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \Rightarrow G\left(\frac{-7}{4};\frac{5}{4}\right)$.

2. Soit $h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$. .

a) $h(G) = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + 3\,\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = \ldots\ldots = -87/4$

b) $h(M) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})$

$= 6\,\mathrm{MG}^2 + \overrightarrow{MG}.(4\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} + 5\,\overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + 3\,\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

$= 6\,\mathrm{MG}^2 + \vec{MG} \cdot \vec{0} + h(G) = 6\,\mathrm{MG}^2 + h(G).$

c) $h(M) = 18 \Leftrightarrow 6MG^2 + h(G) = 18 \Leftrightarrow 6MG^2 = 18 - \frac{-87}{4} = \frac{159}{4} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{159}{24} = \frac{53}{8}$.

L'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = 18$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{53}{8}}$.