Lycée Victor Hugo
MARRAKECH

Mathématiques
J 23-10-03

Classe de 1S2

Interrogation (60 min.)

(Calculatrice non autorisée)

Exercice 1 (10 points)

Etant donné un tétraèdre ABCD, on donne les points E et F tels que :

$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$

Les points I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

1. Préciser la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.
2. Montrer que $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$
3. En déduire que les trois vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.
4. Quel résultat peut-on en conclure pour les points D,I,J et F ?

Exercice 2 (10 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

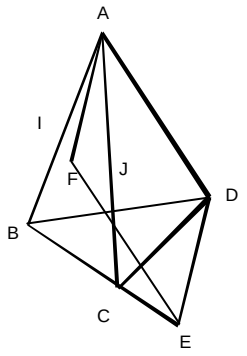
On donne les points A(2,0,0) ; B(-1, $\sqrt{3}$,0) et C(-1,-$\sqrt{3}$,0).

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O.
2. Déterminer S(0,0,s) de (Oz) avec s > 0 tel que SABC soit un tétraèdre régulier.
3. Soit Ω le milieu de [OS].

Montrer que le tétraèdre ΩABC est un trirectangle de sommet Ω (c'est-à-dire que (ΩA),(ΩB) et (ΩC) sont orthogonales deux à deux) et que de plus ΩA= ΩB= ΩC.

Correction du devoir J 23-10-03

Exercice 1



1.

I milieu de [AB] et J milieu de [AC] ainsi : $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{CE}$

Conclusion : le quadrilatère ECIJ est un parallélogramme.

Par hypothèse $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$, conclusion : le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

2. Nous voulons montrer que $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$

1ère méthode :

J milieu de [AC] d'où $2\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ainsi $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{ED}$ (car AFED est un parallélogramme).

Par conséquent : $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{JI}$

2ème méthode :

ABCD est un tétraèdre, donc ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$) est une base de l'espace.

Comme J est le milieu de [AC] d'où $2\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.

Comme AFED est un parallélogramme, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE}$.

Par ailleurs $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{DA} + \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} - \vec{AD}$,

donc $\vec{DF} = -2\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$.

Ainsi : $2\vec{DJ} - \vec{DF} = -2\vec{AD} + \vec{AC} + 2\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

D'après *1.* $\vec{JI} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

Par conséquent : $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$..

3ème méthode :

ABCD est un tétraèdre, donc (A, $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$) est un repère de l'espace.

Comme I et J sont les milieux respectifs de [AB] et[AC] ,

d'où I a pour coordonnées (1/2 ;0 ;0) et J a pour coordonnées (0 ;1/2 ;0).

Comme $\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$;

d'où E a pour coordonnées (-1/2 ;3/2 ;0).

Comme AFED est un parallélogramme, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$ ainsi,

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

D'où, $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ d'où F a pour coordonnées (-1/2 ;3/2 ;-1).

On en déduit que : $\overrightarrow{DJ}(0-0;1/2-0;0-1)$ =(0 ;1/2 ;-1) , $\overrightarrow{DF}(-1/2-0;3/2-0;-1-1)$ =(-1/2 ;1/2 ;0)

et $\overrightarrow{IJ}(0-1/2;1/2-0;0-0)$ =(-1/2 ;1/2 ;0).

Donc $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées (1/2 ;-1/2 ;0), ainsi $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$

3.

D'après 2. nous avons $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$, or $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DI}$ (relation de Chasles) par suite

$2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{JD} - \overrightarrow{DI} = \vec{0}$ soit $3\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DI} = \vec{0}$.

Ainsi, les trois vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

4.

D'après 3. les points D,I,J et F sont coplanaires.

<u>Exercice 2</u>

Le repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et les points A(2,0,0) ; B(-1, $\sqrt{3}$,0) et C(-1,- $\sqrt{3}$,0) sont donnés.

1.

$\overrightarrow{AB}(-1-2;\sqrt{3}-0;0-0)=(-3;\sqrt{3};0)$,

$\overrightarrow{AC}(-1-2;-\sqrt{3}-0;0-0)=(-3;-\sqrt{3};0)$ et $\overrightarrow{BC}(-1+1;-\sqrt{3}-\sqrt{3};0-0)=(0;-2\sqrt{3};0)$.

D'où AB=BC=CA= 2 $\sqrt{3}$ donc ABC est un triangle équilatéral.

De même, OA=OB=OC=2 donc O est le centre du triangle ABC.(On peut également montrer que ($\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$)

Conclusion : ABC est un triangle équilatéral de centre O.

2.

Soit le point S(0,0,s) de (Oz) (avec s > 0).

SABC est un tétraèdre régulier, si et seulement si toutes ses arêtes ont la même longueur.

Par conséquent : SA =SB=SC =AB ,(car AB = BC = CA)

or $\overrightarrow{AS}(0-2;0-0;s-0)=(-2;0;s)$ donc SA= $\sqrt{4+s^2}$.

SA = AB $\Leftrightarrow$ $s^2+4=12$ $\Leftrightarrow$ $s^2 = 8$ $\Leftrightarrow$ s = 2 $\sqrt{2}$ ou s = -2 $\sqrt{2}$.

Donc S a pour coordonnées (0 ;0 ; 2 $\sqrt{2}$) (car s>0)

3.

Ω le milieu de [OS] d'où Ω a pour coordonnées (0 ;0 ; $\sqrt{2}$) .

$\overrightarrow{\Omega A}(2;0;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{\Omega B}(-1;\sqrt{3};-\sqrt{2})$ et $\overrightarrow{\Omega C}(-1;-\sqrt{3};-\sqrt{2})$.

D'après la condition d'orthogonalité de deux vecteurs :

2x(-1)+0x $\sqrt{3}$ + $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ =-2+2=0 , ainsi $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont orthogonaux d'où (ΩA) ⊥ (ΩB).

2x(-1)+0x(- $\sqrt{3}$)+ $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ =-2+2=0 , ainsi $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$ sont orthogonaux d'où (ΩA) ⊥ (ΩC).

(-1)x(-1)+ $\sqrt{3}$ x(- $\sqrt{3}$)+ $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ =1-3+2=0, ainsi $\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont orthogonaux d'où (ΩC) ⊥ (ΩB).

Donc les droites (ΩA),(ΩB) et (ΩC) sont orthogonales deux à deux.

Par ailleurs : ΩA= ΩB= ΩC= $\sqrt{6}$

Nous pouvons donc conclure que ΩABC est un trirectangle de sommet Ω .