

BARYCENTRE DANS LE PLAN

1) BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

A) DEFINITION

PROPRIETE

Soit A et B deux points du plan, a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

DEFINITION

Ce point G est appelé **barycentre** du système $\{(A, a); (B, b)\}$.

On dit aussi que G est le barycentre **des points pondérés** ou **des points massifs**

(A, a) et (B, b) .

- a et b peuvent être négatifs
- Dans la pratique on dit :
« G barycentre de $(A, a), (B, b)$ »

preuve :

On a :

$$\begin{aligned} a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow a \overrightarrow{GA} + b (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} && \text{(d'après la relation de Chasles)} \\ &\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{GA} = -b \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{AG} = b \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB} && \text{(car } a + b \neq 0) \end{aligned}$$

Ainsi chercher un point G tel que $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, c'est chercher un point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}$.

Or, si $a + b \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}$; on en déduit le résultat.

Si $a + b = 0$, alors il n'y a pas de barycentre.

Rem : Pour la construction du barycentre, on utilise le fait que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}$.

Ex : Construire les barycentre suivants :

G1 barycentre de
 $(A, 1), (B, 1)$

G2 barycentre de
 $(C, -3), (D, -2)$

G3 barycentre de
 $(E, 4), (F, -2)$

A
B
C
D
F
E
+
+
+
+
+
+

B) PROPRIETES (Dans la suite on suppose $a + b \neq 0$)

• HOMOGENEITE

Si G est le barycentre de $(A, a), (B, b)$, alors, pour tout réel k non nul, G est le barycentre de $(A, ka), (B, kb)$.

preuve :

Pour $k \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow k(a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB}) &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow ka \overrightarrow{GA} + kb \overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

$ka + kb \neq 0$; G est donc aussi le barycentre de $(A, ka), (B, kb)$

Ex :

- G1 est aussi le barycentre de $(A, 3), (B, 3)$
- G2 est aussi le barycentre de $(C, 9), (D, 6)$
- G3 est aussi le barycentre de $(E, -4), (F, 2)$

• POSITION DU BARYCENTRE

Si G est le barycentre de $(A, a), (B, b)$, alors G est situé sur la droite (AB).

Et réciproquement : tout point de (AB) est barycentre de A et B affectés de coefficients bien déterminés (livre p 241)

Preuve :

$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$, ainsi $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, donc G est situé sur (AB)

Rem :

Si $a = b (\neq 0)$, G est appelé **isobarycentre** de A et de B.

L'isobarycentre des deux points A et B est aussi le milieu du segment [AB].

En regardant d'un peu plus près ...**Idée de Preuve**

Si le coefficient de A est nul, alors G et B sont confondus. (de même pour B)	On a, $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $a = 0$, donc $b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (car $b \neq 0$)
Si a et b sont de même signe alors $G \in [AB]$.	On peut supposer a et b positif. Ainsi $0 < \frac{b}{a+b} < 1$... et $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$
Si a et b sont de signe contraire alors G appartient à la droite (AB) privé du segment [AB].	On peut supposer $a < 0$ et $b > 0$. Deux cas se présentent : $a + b < 0$, ainsi $\frac{b}{a+b} < 0$ $a + b > 0$, or $a + b < b$, ainsi $\frac{b}{a+b} > 1$ On déduit le résultat de $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$
Si $ a > b $, alors G est « plus près » de A que de B.	On a, $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $a \overrightarrow{GA} = -b \overrightarrow{GB}$ Ainsi $ a GA = b GB $, c'est à dire $\frac{ GA }{ GB } = \frac{ b }{ a }$...

• **PROPRIETE FONDAMENTALE**

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors pour tout point M du plan : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$

Preuve:

On a, $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc pour tout point M du plan, on a :
 $a (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + b (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ (Chasles)
 $\Leftrightarrow (a+b) \overrightarrow{GM} + a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$

Rem:

- Si on considère le milieu I de [AB], on retrouve une formule vue en seconde :
Pour tout point M du plan ... $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$
- Si M et A sont confondus, on retrouve : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$; si M et B sont confondus ... $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$; ...

Un choix judicieux de M, permet une construction facile de G.

C.) COORDONNEES DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS

Le plan est muni d'un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan. Le barycentre G de (A , a) , (B , b) a pour coordonnées : $x_G = \frac{1}{a+b} (a x_A + b x_B) \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{a+b} (a y_A + b y_B)$

G a pour abscisse la moyenne pondérée des abscisses de A et B et pour ordonnée la moyenne pondérée des ordonnées de A et B.

Preuve :

On a vu que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB})$

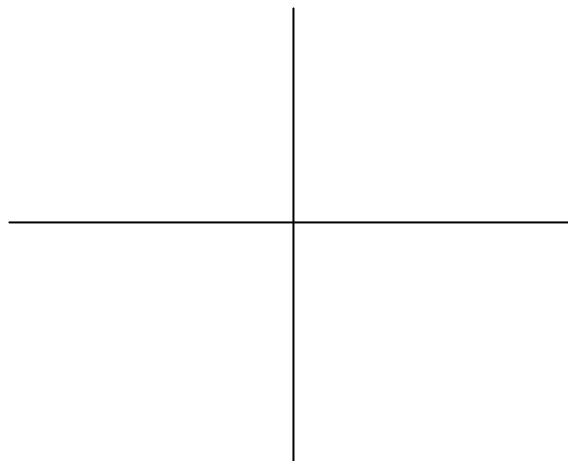
Pour O en particulier, on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB})$

$$= \frac{1}{a+b} (a (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) + b (x_B \vec{i} + y_B \vec{j}))$$

$$= \frac{1}{a+b} (a x_A + b x_B) \vec{i} + \frac{1}{a+b} (a y_A + b y_B) \vec{j}$$

Ex:

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on a, $A(-1; -3)$ et $B(2; 2)$.
Placer le point G barycentre de $(A, 1), (B, 3)$

**2) BARYCENTRE DE 3 POINTS PONDERES ET PLUS ...****A) DEFINITION**

L'étude faite au paragraphe précédent se généralise à trois points pondérés, quatre points ou plus.

Nous n'énonçons la définition et les propriétés que dans le cas de trois points pondérés. (pour le cas général reportez-vous p 244 du livre)

PROPRIETE :

Soit A, B et C trois points du plan, a, b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Il est donné par ...

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c} (b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC})$$

DEFINITION :

Ce point G est appelé **barycentre** de $(A, a), (B, b), (C, c)$.

Comme dans le cas de deux points pondérés :• **HOMOGENEITE :**

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul.

• **ISOBARYCENTRE :**

Si $a = b = c (\neq 0)$, G est encore appelé **isobarycentre** de A, B et C.

On verra en exercice que si A, B et C ne sont pas alignés alors l'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

• **PROPRIETE FONDAMENTALE :**

Après quelques calculs, on montre que pour tout point M du plan :

$$a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}$$

Ce qui nous permet de construire G en choisissant judicieusement M. ($M = A, M = B, M = C \dots$)

• **COORDONNEES :**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on déduit facilement de la formule ci-dessus les coordonnées de G.

$$\text{En prenant } M = O \dots : \quad x_G = \frac{1}{a+b+c} (a x_A + b x_B + c x_C) \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{a+b+c} (a y_A + b y_B + c y_C)$$

Rem :

Si l'un des coefficient est nul (par exemple c), alors G est le barycentre des deux points pondérés $(A, a), (B, b)$

B) BARYCENTRE PARTIEL on suppose $a + b + c \neq 0$

Si on remplace deux points pondérés (A, a) et (B, b) (avec $a + b \neq 0$) par leur barycentre H affecté du coefficient $a + b$, alors le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ est aussi le barycentre de $(C, c), (H, a + b)$.

Preuve:

Soit H le barycentre de $(A, a), (B, b)$.

On a alors $a \overrightarrow{HA} + b \overrightarrow{HB} = \vec{0}$

Soit G le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$.

On a alors $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) + b (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{GH} + a \overrightarrow{HA} + b \overrightarrow{HB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{GH} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On en déduit que G est le barycentre de $(C, c), (H, a + b)$.

Mais ... quel intérêt ?

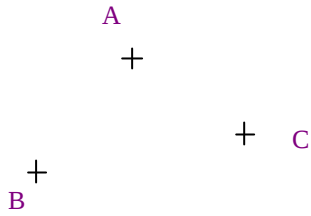
Cette propriété permet de ramener la construction du barycentre de trois points (ou plus), à la construction (connue j'espère) du barycentre de deux points.

Ex:

Soit A , B et C trois points du plan .

Construire le barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

Choisir les combinaisons les plus simples



Rem : Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre est situé à l'intérieur du triangle ABC .