1 ère S 4 **Devoir Surveillé n ° 7**

- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**nom :**	**voisin :**
1) *4 pts* **2)** *3 pts* **3)** *3 pts* **4)** *3 pts* **5)** *3 pts* **6)** *4 pts*	**voisin :**	**voisin :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante. Soyez propre et clair . Bonne chance …*

APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE

Ex1 :

a) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$ est celle d'un cercle C . Déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.

b) Démontrer que les points A (3 ; 5) et B (5 ; –1) appartiennent au cercle C .

c) Déterminer une équation de la tangente en A , puis une équation de la tangente en B au cercle C .

d) Déterminer les coordonnées de T le point d'intersection de ces deux tangentes.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20$

Ainsi C est le cercle de centre I (1 ; 1) et de rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b)

- $(3-1)^2 + (5-1)^2 = 4 + 16 = 20$ donc $A \in C$
- $(5-1)^2 + (-1-1)^2 = 16 + 4 = 20$ donc $B \in C$

c)

- La tangente d en A au cercle C et la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (IA)

On a $\overrightarrow{IA}$ (2 ; 4) et $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à d.

Ainsi d a une équation de la forme : $2x + 4y + c = 0$ (avec $c \in \mathbb{R}$)

De plus d passe par A , donc :

$$2 \times 3 + 4 \times 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -26$$

Ainsi d a pour équation :

$$2x + 4y - 26 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 13 = 0$$

- La tangente d' en B au cercle C et la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (IB)

On a $\overrightarrow{IB}$ (4 ; – 2) et $\overrightarrow{IB}$ est un vecteur normal à d' .

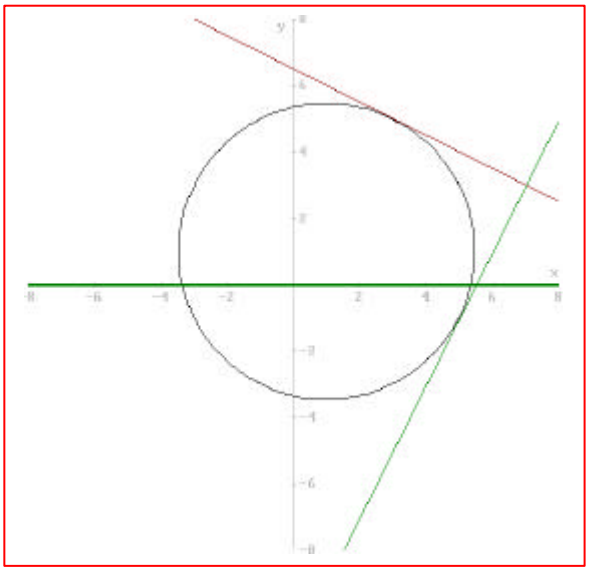
Ainsi d' a une équation de la forme : $4x - 2y + c' = 0$ (avec $c' \in \mathbb{R}$)

De plus d' passe par B , donc :

$$4 \times 5 + 2 \times 1 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = -22$$

Ainsi d a pour équation :

$4x - 2y - 22 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 11 = 0$



d) Les coordonnées de T vérifient le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ 2x - y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ex2 :

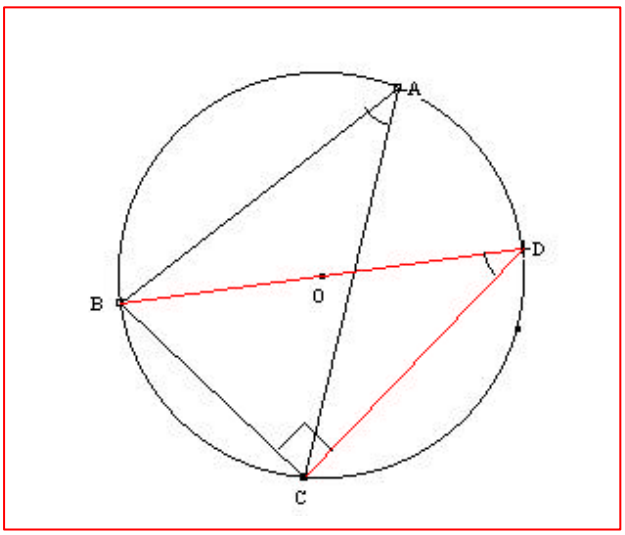
Soit un triangle ABC (tel que $\widehat{BAC}$ est un angle aigu) inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R .

On pose BC = a , AB = c , AC = b et $\widehat{BAC} = \widehat{A}$.

On note D le point diamétralement opposé au point B .

a) Démontrer que $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$

b) Prouver que l'aire du triangle est : $S = \dfrac{abc}{4R}$



a) Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ interceptent le même arc de cercle.

On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \hat{A}$

Dans le triangle BCD , C appartient au cercle, donc BCD est rectangle en C.

Ainsi :

$\sin \widehat{BDC} = \sin \hat{A} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$ …

b)

On sait que $S = \frac{1}{2} b\, c \sin \hat{A}$

Donc $S = \frac{1}{2} b\, c \sin \hat{A} = \frac{1}{2} b\, c \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$

Ex3 :

a) Montrer que : $\cos 2x \cos x \sin x = \frac{1}{4} \sin 4x$

En déduire une simplication de l'écriture suivante : $\cos 4x \cos 2x \cos x \sin x$

b) Calculer l'expression : $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$

a)

- $\cos 2x \cos x \sin x = \cos 2x \times (\frac{1}{2} \sin 2x) = \frac{1}{2} \cos 2x \sin 2x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin 4x$
- $\cos 4x \cos 2x \cos x \sin x = \cos 4x \times \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \cos 4x \sin 4x = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \sin 8x = \frac{1}{8} \sin 8x$ (1)

b)

En utilisant (1) et $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$, on obtient : $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$

SUITES NUMERIQUES

Ex 4 :

u est une suite définie sur $\mathbb{N}$ et croissante.

v est une suite définie sur $\mathbb{N}$, à termes strictement positifs et croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - \frac{1}{2 v_n}$

Que peut-on dire de la suite w ?

u est croissante, donc pour tout entier n , on a : $u_n \leq u_{n+1}$

v est croissante, donc pour tout entier n , on a :

$v_n \leq v_{n+1} \Leftrightarrow 2 v_n \leq 2 v_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2 v_n} \geq \frac{1}{2 v_{n+1}}$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2 v_n} \leq -\frac{1}{2 v_{n+1}}$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_n - \frac{1}{2 v_n} \leq u_{n+1} - \frac{1}{2 v_{n+1}} \Leftrightarrow w_n \leq w_{n+1}$

ainsi la suite w est croissante.

Ex 5 :

Calculer les sommes ci-dessous :

a) $S = 5 + \frac{17}{3} + \frac{19}{3} + 7 + \ldots + \frac{187}{3} + 63$

Soit la suite (u_n) définie pau $u_n = 5 + \frac{2}{3} n$; (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{2}{3}$

On a $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$

et $u_p = 63 \Leftrightarrow 5 + \frac{2}{3} p = 63 \Leftrightarrow \frac{2}{3} p = 58 \Leftrightarrow p = 87$

Ainsi $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{87} = 88 \times \frac{u_0 + u_{87}}{2} = 44 \times (5 + 63) = 44 \times 68 = 2992$

b) $S' = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \ldots + 16 + 16\sqrt{2}$

Soit la suite (v_n) définie pau $v_n = \frac{1}{8} (\sqrt{2})^n$; (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{1}{8}$ et de raison $\sqrt{2}$

On a $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_p$

et $v_p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} (\sqrt{2})^p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{p-1} = 128$

On a $(\sqrt{2})^{14} = 128$

Donc p = 15

Ainsi $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{15} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - (\sqrt{2})^{16}}{1 - \sqrt{2}} = \ldots = \frac{255}{8} (1 + \sqrt{2})$

Ex 6 :

u est la suite définie par $u_0 = 0$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout entier n.

v est la suite définie pour tout entier n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison .
b) Exprimer v_n en fonction de n .
c) En déduire u_n en fonction de n .

a)
Pour tout entier n , on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 1}{5u_n + 15}}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3}} = \ldots = \frac{1}{5}$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$

b) Pour tout entier n , on a :

$$v_n = -\frac{1}{3} \times (\frac{1}{5})^n$$

c) Pour tout entier n , on a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_n \times u_n + 3 \times v_n = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow v_n \times u_n - u_n = -1 - 3\, v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n \times (v_n - 1) = -1 - 3\, v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 3\, v_n}{v_n - 1}$$

En remplaçant par $v_n = -\frac{1}{3} \times (\frac{1}{5})^n$, on obtient :

$$u_n = -3 \frac{(\frac{1}{5})^n - 1}{(\frac{1}{5})^n + 3} = -\, 3 \times \frac{1 - 5^n}{1 + 3 \times 5^n} = 3 \times \frac{5^n - 1}{1 + 3 \times 5^n}$$