1 ère S 4 **Devoir Surveillé n ° 4**

- Durée 1
- Calculatrices interdites
(et inutiles !)

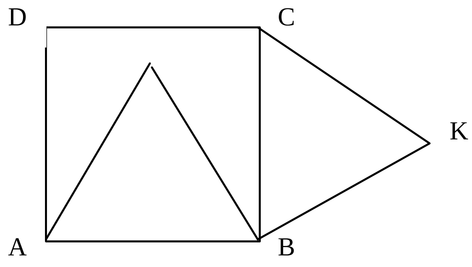
Barème :	**nom :**	**voisin :**
1) *6 pts* **2)** *8 pts* **3)** *2 pts* **4)** *2 pts*	**voisin :**	**voisin :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante. Soyez propre et clair . Bonne chance …*

ANGLES ORIENTES DE VECTEURS - TRIGONOMETRIE

Ex1 :

ABCD est un carré . ABJ et CBK sont des triangles équilatéraux tels que J est à l'intérieur du carré et K est à l'extérieur.



1) Déterminer la mesure principale de l'angle ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ}$)
2) Déterminer la mesure principale de l'angle ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DK}$)
3) Démontrer que les points D , J et K sont alignés.

1) BAJ est équilatéral, donc AJ = AB et $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{3}$

de plus ABCD est un carré, donc DA = AB et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$

Ainsi DAJ est un triangle isocèle en A et $\widehat{DAJ} = \ldots = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Dans un triangle la somme des mesures des angles est égale à π et dans un triangle isocèle les angles à la base ont même mesure …

On en déduit que $\widehat{ADJ} = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{12}$ et ($\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DJ}$) = $\frac{5\pi}{12}$

Or ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ}$) = ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$) + ($\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DJ}$)

Donc ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ}$) = $-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$

2) BKC est équilatéral, donc CK = BC et $\widehat{BCK} = \frac{\pi}{3}$

de plus ABCD est un carré, donc BC = DC et $\widehat{DCB} = \frac{\pi}{2}$

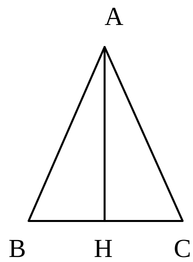
Ainsi DCK est un triangle isocèle en C et $\widehat{DCB} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

Dans un triangle la somme des mesures des angles est égale à π et dans un triangle isocèle les angles à la base ont même mesure …

On en déduit que $\widehat{CDK} = \frac{1}{2}(\pi - \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}$ et ($\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DK}$) $= -\frac{\pi}{12}$

3) ($\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DK}$) = ($\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DC}$) + ($\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DK}$) = $\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = 0$ …

Ex 2 : Calcul de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$



Soit H le pied de la hauteur (donc médiane …) issue de A . H est le milieu de [BC]

BH = $a \sin\frac{\alpha}{2}$ et

HC = $a \sin\frac{\alpha}{2}$ …

1) Préliminaires !

ABC est un triangle isocèle en A , tel que AB = AC = a et $\widehat{BAC} = \alpha$

Démontrer que BC = $2a\sin\frac{\alpha}{2}$

2) Soit (O; $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$) un repère orthonormé du plan .

M est le point de coordonnées polaires ($1 ; \frac{\pi}{4}$) dans le repère (O ; $\overrightarrow{OI}$)

a) Calculer la distance IM

$x_I = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_I = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$IM^2 = (x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2 - 4\sqrt{2} + 4 + 2}{4} = 2 - \sqrt{2}$

Ainsi $IM = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$

D'après la question 1) , $IM = 2 \times 1 \times \sin(\frac{\pi}{8}) = 2\sin\frac{\pi}{8}$ … et donc $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c) … puis celle de $\cos\frac{\pi}{8}$

$(\cos\frac{\pi}{8})^2 = 1 - (\sin\frac{\pi}{8})^2 = \frac{4 - 2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

Or $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

<u>Ex 3 :</u>

Calculer :

$\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$ = … = 0 ($\sin(\pi - x) = \sin x$ …)

<u>Ex 4 :</u>

(E) est l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$

Résoudre l'équation (E) dans $]-\pi ; \pi]$

Dans $\mathbb{R}$,

$\cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k'\pi$

Dans $]-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{ -\frac{7\pi}{9} , -\frac{5\pi}{9} ; -\frac{\pi}{9} ; \frac{\pi}{9} ; \frac{5\pi}{9} ; \frac{7\pi}{9} \}$