ANGLES ORIENTES - REPERAGE POLAIRE

Par convention on oriente le cercle : le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

I. Angles orientés.

Soit le cercle de centre O ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Les demi-droites [OM) et [ON) coupent le cercle trigonométrique en deux point A et B. au couple ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$), on associe une famille de nombres de la forme $l + 2k\pi$, $k \in 9$ où l est la longueur de l'arc AB.

Par définition, chacun de ces nombres est une mesure en radians de l'angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

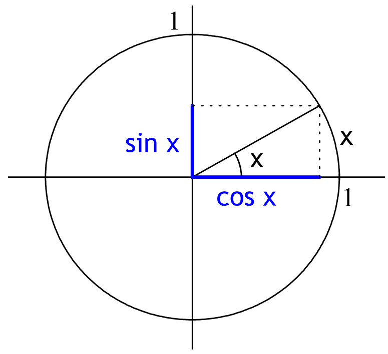
1. Parmi toutes les mesures de $l + 2k\pi$, il n'y en a qu'une qui soit dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$. Cette mesure est appelée **mesure principale** de ($\vec{u}$, $\vec{v}$)
2. La valeur absolue de la mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à la mesure en radians de l'angle géométrique formé par ($\vec{u}$, $\vec{v}$).
3. O est un point fixe et α un réel. La **rotation** de centre O de l'angle α, mesuré en radians, est la transformation, notée $R_{(O,\, \alpha)}$ du plan orienté telle que O est invariant et tout point M, d'image M' est tel que OM = OM' et ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$) = α

II. Propriétés des angles orientés.

1. Dire que deux vecteurs sont colinéaires de même sens équivaut à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
2. Dire que deux vecteurs sont colinéaires de sens contraire équivaut à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$
3. Pour tous vecteurs non nuls, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$
4. Pour tous vecteurs non nuls, $\vec{u}, \vec{v}$: $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ $\quad (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

   $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ $\quad (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
5. Soit 4 points du cercle M, A , B et N entre A et B ; on a : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi + (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$

III. Trigonométrie



Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormal direct et C le cercle trigonométrique associé.

Soit x un réel et soit M le point de C tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$
Le point M a pour cuople de coordonnées (cos x ; sin x)

Autrement dit $\overrightarrow{OM} = \cos x \,.\, \overrightarrow{OA} + \sin x \,.\, \overrightarrow{OB}$

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur IR et on a pour tout réel x :

$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

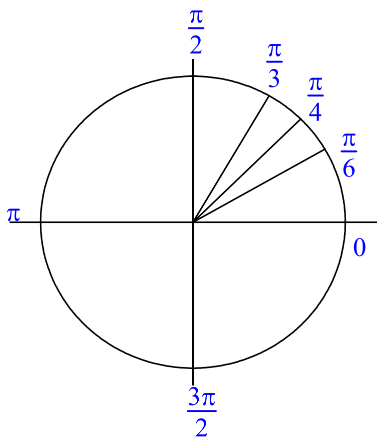
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

<u>Valeurs particulières</u>

Il faut savoir donner, sans hésitation, les valeurs particulières suivantes, et savoir les faire apparaître sur un cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin x	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



<u>Propriétés</u>

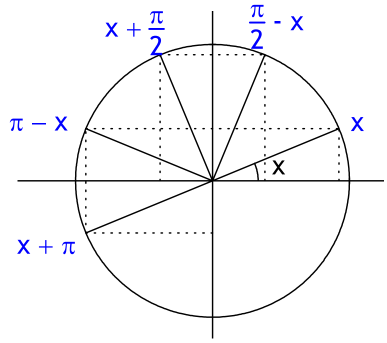
La fonction sinus est impaire : pour tout réel x, on a $\sin(-x) = -\sin x$
(Sa courbe représentative dans un repère orthogonal a pour centre de symétrie l'origine du repère).

La fonction sinus est dérivable sur IR et sa dérivée est : $(\sin x)' = \cos x$

La fonction cosinus est paire : pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos x$
(Sa courbe représentative dans un repère orthogonal a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées).

La fonction cosinus est dérivable sur IR et sa dérivée est : $(\cos x)' = -\sin x$

Correspondances



Pour tout réel x :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

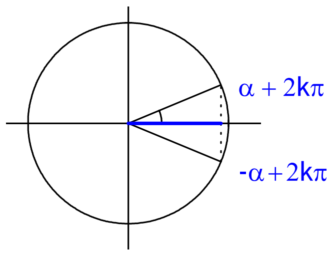
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = - \sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = - \cos x$

$\cos(x + \pi) = - \cos x$; $\sin(x + \pi) = - \sin x$

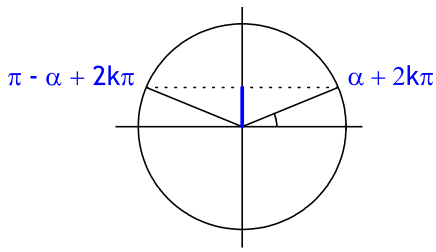
Il faut savoir retrouver toutes ces égalités à partir du dessin.

Résolution d'équations



α étant un réel fixé :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in 9$$



$$\sin x = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in 9$$

IV. Repérage polaire.

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct. Si un point M est distinct de O, alors M est repéré par l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$ et par sa distance à O : OM = r.

On a donc pour tout point M distinct de O, un couple (r, θ) tel que $r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$.
On appelle ce couple les **coordonnées polaire de M**. On note **M (r ; θ)**

Les coordonnées cartésiennes de M sont $(x ; y)$ alors on a :

$$\boxed{\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad x = \mathbf{r.\cos\theta} \quad ; \quad y = \mathbf{r.\sin\theta}}$$